

TESI DI DOTTORATO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA BIOMEDICA
ELETTRONICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI

DOTTORATO DI RICERCA IN
INGEGNERIA ELETTRONICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI

APPLICAZIONI DELLA TEORIA
DELL’OTTIMIZZAZIONE
ALL’ELABORAZIONE
DEL SEGNALE RADAR

SALVATORE IOMMELLI

Il Coordinatore del Corso di Dottorato Il Tutore

Ch.mo Prof. Niccoló RINALDI

Ch.mo Prof. Antonio DE MAIO

A. A. 2010-2011

Indice

Introduzione	1
Notazione	3
1 Tecniche di Ottimizzazione	5
1.1 Introduzione	5
1.2 Ottimizzazione Convessa	8
1.3 Problemi di Ottimizzazione Convessa	10
1.3.1 Semidefinite Program (<i>SDP</i>)	11
1.3.2 Quadratic Program (<i>QP</i>)	11
1.3.3 Second-Order Cone Program (<i>SOCP</i>)	12
1.4 Dualità Lagrangiana	13
1.4.1 Problema Duale di Lagrange	14
1.5 Rilassamento	16
1.5.1 Rilassamento in un <i>SDP</i>	17
1.5.2 Rilassamento Lagrangiano	17
1.6 Ottimizzazione Vettoriale	19
1.6.1 Scalarizzazione	20
1.6.2 Trade-off analysis	22
1.7 Il Problema di Ottimizzazione <i>MAXDET</i>	23
2 Rivelazione e Classificazione di Segnali Radar	25
2.1 Introduzione	25
2.2 Primo problema di rivelazione e classificazione	26
2.2.1 Schema di rivelazione e classificazione	28
2.2.2 Analisi delle prestazioni	33
2.3 Secondo problema di rivelazione e classificazione	36
2.3.1 Schema di rivelazione e classificazione	37

2.3.2	Soluzione Proposta	39
2.3.3	Analisi delle prestazioni	45
2.4	Conclusioni e Sviluppi Futuri	50
3	Progetto di Filtri Disadattati mediante Ottimizzazione	
	Convessa	53
3.1	Introduzione	53
3.2	Note sui sistemi radar	54
3.3	Modello analitico	57
3.3.1	Modello di segnale	59
3.3.2	Metriche considerate	62
3.3.3	Progetto a minimo <i>PSL</i>	63
3.3.4	Progetto a minimo <i>ISL</i>	65
3.3.5	Progetto a minimo <i>ISNR</i> con vincolo sull' <i>ISL</i>	67
3.3.6	Filtri Ottimi nel caso di Shift Doppler	69
3.4	Progetto del Filtro Ottimo secondo Pareto	71
3.5	Analisi delle prestazioni	73
3.5.1	Codice di Barker a lunghezza 13	74
3.5.2	Codice di Barker Polifase a lunghezza 34	86
3.6	Conclusioni e Sviluppi Futuri	93
4	Stima Vincolata della Matrice di Covarianza del Disturbo	
	Radar	95
4.1	Introduzione	95
4.2	Fonti di disturbo nei sistemi radar	96
4.3	Modello analitico	97
4.3.1	Stima ML della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento	99
4.3.2	Utilizzo di conoscenze a priori	104
4.3.3	Criteri per la scelta della costante k_{max}	105
4.4	Tecniche alternative per la stima della Matrice di Covarianza	107
4.4.1	LSMI	107
4.4.2	PSMI-SMI	108
4.4.3	FML	109
4.4.4	EPM	110
4.5	Analisi delle prestazioni	111
4.5.1	Descrizione del Contesto Operativo	111
4.5.2	Analisi prestazionale	114
4.6	Conclusioni e Sviluppi Futuri	124

Indice	III
Appendice	127
Bibliografia	131
Ringraziamenti	137

Introduzione

La tesi tratta l'applicazione di tecniche di ottimizzazione innovative all'elaborazione del segnale radar. In primis sono fornite le basi teoriche/analitiche delle tecniche di ottimizzazione usate nel corso dell'elaborato (Capitolo 1). Successivamente sono presentate le tre applicazioni considerate (rispettivamente nei Capitoli 2, 3, e 4).

Il secondo Capitolo tratta problemi di ottimizzazione quadratica non-convessi che ricorrono spesso in problemi di stima a Massima Verosimiglianza (ML) per applicazioni radar, nell'ipotesi di segnale immerso in disturbo Gaussiano eventualmente colorato. In generale, quando il numero di vincoli in un problema di ottimizzazione quadratica non convesso è maggiore di due il problema è NP-hard, cioè richiede per la sua soluzione una complessità che aumenta in modo esponenziale con le dimensioni del problema. Tuttavia, ci sono dei casi particolari, quando il numero di vincoli è minore o uguale a due che il problema può essere risolto con complessità computazionale polinomiale. La teoria studiata è stata applicata al problema della discriminazione tra segnale utile e disturbo intenzionale (jammer) tipico di applicazioni radar. Il problema è formulato analiticamente come un test di ipotesi ternario in cui l'ipotesi H_0 è rappresentativa del solo disturbo, l'ipotesi H_1 di segnale utile più disturbo, l'ipotesi H_2 di jammer più disturbo. Si assume di avere un vettore di osservabili N -dimensionale in cui il rumore è modellato come un vettore Gaussiano colorato a media nulla. La componente di segnale del vettore degli osservabili varia in un cono centrato intorno alla direzione nominale nel caso di segnale utile, nella regione compresa tra due coni (corona conica), nel caso di disturbo intenzionale. Il problema della classificazione è risolto con una strategia a due stadi.

Nel Capitolo 3 la teoria di ottimizzazione multi-obiettivo e il criterio di Pareto sono applicati alla sintesi di filtri radar "disadattati". I progetti hanno lo scopo di migliorare rispetto al filtro adattato il profilo

dei lobi laterali in uscita attraverso la minimizzazione di opportune metriche prestazionali. A tal proposito, sono considerati i progetti relativi alla minimizzazione del *ISL* (*Integrated Sidelobe Level*) e del *PSL* (*Peak Sidelobe Level*). Successivamente si è considerata l'ottimizzazione congiunta delle due metriche prima specificate pervenendo ad un problema di ottimizzazione vettoriale bi-criterio in cui le funzioni obiettivo considerate sono l'*ISL* ed il *PSL*. E' quindi definita la procedura per ottenere tutti gli ottimi di Pareto relativi al problema variando opportunamente il peso relativo di una metrica rispetto all'altra. Quello che si realizza praticamente, è una minimizzazione congiunta delle due metriche che porta a soluzioni di compromesso tra quelle fornite dai relativi progetti a minimo *ISL* ed a minimo *PSL*.

Nel Capitolo 4 è trattato il problema della stima vincolata della matrice di covarianza del disturbo. In tipici scenari applicativi essa è stimata a partire da dati secondari, cioè echi relativi a celle spazialmente vicine a quella sotto test ipotizzando che tali celle abbiano le stesse caratteristiche spettrali della cella in esame. La necessità di omogeneità del disturbo nei dati secondari rappresenta una limitazione piuttosto significativa, in quanto, il loro numero risulta necessariamente limitato. Quindi, a causa della scarsa disponibilità di campioni, la matrice di covarianza stimata spesso comporta un grado di cancellazione dell'interferenza ridotto, con conseguenti perdite delle proprietà di rivelazione del radar. E' necessario pertanto sfruttare informazioni a priori circa la struttura disturbo che si traducono analiticamente in vincoli da imporre al problema di stima. Per tale motivo è considerata la stima ML della matrice di covarianza del disturbo con un vincolo sul numero di condizionamento. E' mostrato come tale stima possa essere ottenuta come soluzione di un problema di ottimizzazione convessa di tipo *MAXDET*. Infine, le prestazioni dello stimatore sono paragonate a quelle di altre soluzioni già presenti in letteratura.

Alla fine di ogni Capitolo sono presentate considerazioni conclusive e possibili linee guida per ricerche future.

Notazione

\mathbf{x}	notazione vettoriale;
\mathbf{x}_i	elemento i -mo di \mathbf{x} ;
\mathbf{X}	notazione matriciale;
\mathbf{X}_{ij}	elemento di posto (i, j) di \mathbf{X} ;
$(\cdot)^T$	operatore trasposto;
$(\cdot)^*$	operatore coniugato;
$(\cdot)^H$	operatore trasposto coniugato;
$\text{Tr}(\cdot)$	traccia della matrice quadrata argomento;
\mathbf{I}	matrice identità;
$\mathbf{0}$	matrice o vettore con elementi nulli;
j	unità immaginaria ($j = \sqrt{-1}$);
$\ \cdot\ $	operatore norma Euclidea;
$ \cdot $	modulo di un numero complesso;
$E[\cdot]$	valore atteso;
$\det(\cdot)$	determinante della matrice quadrata argomento;
$\Re\{\cdot\}$	parte reale dell'argomento;
$\Im\{\cdot\}$	parte immaginaria dell'argomento;
\mathbb{C}	insieme dei numeri Complessi;
\mathbb{R}	insieme dei numeri Reali;
\succeq	$A \succeq B$ significa che $A - B$ è una matrice hermitana semidefinita positiva.

Capitolo 1

Tecniche di Ottimizzazione

1.1 Introduzione

Dinnanzi ad un problema, di qualsiasi natura, la mente umana mira verso la soluzione ottimale. Tale propensione può essere soddisfatta, in qualche misura, quando il contesto e gli obiettivi possono essere descritti numericamente, facendo uso di strumenti analitici, in particolare quelli forniti dalla teoria e dagli algoritmi della programmazione matematica.

Una classe speciale di problemi di programmazione matematica, che include i problemi dei minimi quadrati ed i problemi di programmazione lineare, è rappresentata dall'ottimizzazione convessa.

Lo studio della matematica dell'ottimizzazione convessa affonda le sue radici agli inizi del secolo scorso e trova la sua maturazione durante i settanta anni seguenti (1900-1970), ma, risultando computazionalmente molto onerosa, per le macchine di calcolo del tempo, fu messa da parte per poi essere “rispolverata” nei tardi anni ottanta, quando interessanti sviluppi determinarono di nuovo interesse per questo campo, ed hanno reso attualmente l'ottimizzazione convessa uno strumento fondamentale capace di restituire, in maniera affidabile ed efficiente, soluzioni ad una vasta gamma di problemi.

Gli algoritmi del punto interiore, sviluppati negli anni ottanta per la risoluzione di problemi di programmazione lineare, rappresentano il punto di partenza nella rivalutazione dell'ottimizzazione convessa; infatti, tali algoritmi, combinati ad un'impressionante evoluzione degli strumenti di calcolo, possono essere applicati per la risoluzione di diverse classi di problemi di ottimizzazione convessa quali, *Semidefinite Programs (SDP)*

e *Second-Order Cone Programs (SOCP)*, che, solo qualche anno addietro, erano considerati intrattabili dal punto di vista computazionale, e che ora vengono risolti con la stessa facilità con cui si risolvono problemi di programmazione lineare.

Unitamente all'acquisizione di metodi generali di risoluzione efficiente, fu fondamentale il riconoscere che i problemi di ottimizzazione convessa si presentano, anche se non esplicitamente, con molta più frequenza di quanto si supponesse in precedenza; a partire dagli anni novanta, infatti, sono state rivelate molte applicazioni, nelle più differenti aree e settori, quali, i sistemi di controllo automatico, l'elaborazione di segnali, le reti, il progetto di circuiti elettronici, l'analisi e la modellistica dei dati, la statistica e la finanza. Inoltre, l'ottimizzazione convessa ha trovato largo utilizzo in problemi di ottimizzazione combinatoria (ossia con variabili discrete) e in problemi di ottimizzazione non convessa, dove essa viene adoperata per determinare dei limiti al valore ottimo della funzione sotto analisi e per ottenere soluzioni approssimate.

Riconoscere o formulare un problema in termini convessi presenta numerosi vantaggi; tra questi di maggior rilievo è il poter risolvere il problema sotto esame in maniera affidabile ed efficiente, utilizzando il metodo del punto interiore (*Interior point method*) o altri metodi. L'algoritmo del punto interiore è in grado di risolvere un problema di ottimizzazione convessa con un centinaio di variabili ed un migliaio di vincoli, su un desktop computer, in alcune decine di secondi, a mezzo di un numero non elevato di iterazioni. Tali metodi di risoluzione, data la loro efficienza e affidabilità, vengono integrati in software di progettazione e analisi, ed anche in sistemi di controllo automatici e adattativi in real time.

Un generico problema di ottimizzazione matematica, o in generale di ottimizzazione, si esprime nella seguente forma [1, Cap. 1]:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (1.1)$$

e denota il problema di determinare un \mathbf{x} che minimizzi $f_0(\mathbf{x})$ tra tutti gli \mathbf{x} che soddisfano le condizioni $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, e $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, p$.

Il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto *variabile di ottimizzazione* del problema e la funzione $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *funzione obiettivo* o *funzione di costo*.

Le disuguaglianze $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ sono dette *vincoli di disuguaglianza* e le corrispondenti funzioni $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono le *funzioni dei vincoli di disuguaglianza*; allo stesso modo le uguaglianze $h_j(\mathbf{x}) = 0$ sono dette *vincoli di uguaglianza* e le corrispondenti funzioni $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono le *funzioni dei vincoli di uguaglianza*.

L'insieme dei punti per i quali sono definite la funzione obiettivo e le funzioni vincolari è:

$$\mathbb{D} = \bigcap_{i=1}^m \text{dom} f_i \cap \bigcap_{j=1}^p \text{dom} h_j,$$

ed è detto *dominio* del problema di ottimizzazione (1.1). Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ è un *punto ammissibile* se soddisfa tutti i vincoli del problema; il problema (1.1) si dice ammissibile se esiste almeno un punto ammissibile, altrimenti si dice inammissibile. L'insieme di tutti i punti ammissibili è detto *insieme di ammissibilità*.

Il valore ottimo p^* del problema (1.1) è così definito:

$$p^* = \inf \{f_0(\mathbf{x}) \mid f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p\},$$

e può assumere i valori estesi $\pm\infty$. Se il problema è inammissibile si ha che $p^* = \infty$ (seguendo la convenzione classica che l'estremo inferiore di un insieme vuoto è ∞).

Infine, si dice che \mathbf{x}^* è un *punto ottimo* se è ammissibile e se $f_0(\mathbf{x}^*) = p^*$.

Se esistono dei punti ammissibili \mathbf{x}_k con $f_0(\mathbf{x}_k) \rightarrow -\infty$ per $k \rightarrow \infty$, allora $p^* = -\infty$ e si dice che il problema (1.1) *non è limitato inferiormente*.

In generale, ci si riferisce al problema (1.1) come ad un problema di ottimizzazione in *forma standard*; in tal caso la convenzione adottata prevede il valor nullo come secondo membro sia dei vincoli di uguaglianza che di disuguaglianza, nonchè disuguaglianze con il segno \leq ; infine lo scopo del problema è la minimizzazione della funzione obiettivo. Un problema di ottimizzazione può essere sempre espresso in forma standard semplicemente apportando delle opportune modifiche alla funzione obiettivo e/o alle funzioni vincolari.

Un concetto di importanza centrale è l'*equivalenza*: due problemi si dicono *equivalenti* se a partire da una soluzione ottima dell'uno è possibile ricavare, in maniera semplice, una soluzione ottima dell'altro e viceversa. Due problemi equivalenti non sono uguali, essendo diverse

le funzioni vincolari e le funzioni obiettivo; tuttavia, spesso, è possibile passare da un problema all'altro attraverso delle semplici trasformazioni, quali:

- *cambio di variabili*;
- *trasformazioni di funzione obiettivo e funzioni vincolari*;
- *variabili slack*.

In particolare, quest'ultima trasformazione consente di convertire un vincolo di disuguaglianza in un vincolo di uguaglianza con l'aggiunta di un ulteriore vincolo di non negatività; essa si basa sull'osservazione che $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ se e solo se esiste un $s_i \geq 0$ tale che $f_i(\mathbf{x}) + s_i = 0$. Utilizzando questa trasformazione, si ottiene il problema equivalente:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & s_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ & f_i(\mathbf{x}) + s_i = 0, & i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, \dots, p, \end{cases}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $s_i \in \mathbb{R}$.

1.2 Ottimizzazione Convessa

Un *problema di ottimizzazione convessa* è un problema nella forma [1, Cap. 4]:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} = b_j, & j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (1.2)$$

dove le funzioni $f_0, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono convesse, $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ per $i = 1, \dots, m$, e $b_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, p$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se $\mathbf{dom} f$ è un insieme convesso¹ e se, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{dom} f$ e $\forall \theta : 0 \leq \theta \leq 1$, si ha:

$$f(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y}) \leq \theta f(\mathbf{x}) + (1 - \theta) f(\mathbf{y}).$$

¹Un insieme B è **convesso** se presi due suoi punti il segmento che li congiunge giace in B , cioè se, dati $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$, e $\theta : 0 \leq \theta \leq 1$, si ha: $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta) \mathbf{x}_2 \in B$.

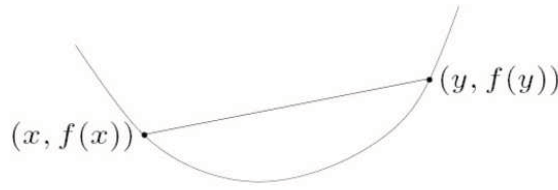


Figura 1.1: Una generica funzione convessa.

Confrontando il problema (1.2) con il generico problema di ottimizzazione nella forma standard (1.1), si osserva come il problema di ottimizzazione convessa presenta tre requisiti aggiuntivi:

- la funzione obiettivo deve essere convessa;
- le funzioni dei vincoli di uguaglianza $h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - b_j$ devono essere *affini*²;
- le funzioni dei vincoli di disuguaglianza devono essere convesse.

Si nota un'importante proprietà: l'insieme di ammissibilità del problema di ottimizzazione convessa è convesso.

La convessità dell'insieme di ammissibilità discende da una proprietà dell'intersezione tra insiemi: l'intersezione è un'operazione che preserva la convessità. Infatti, l'insieme di ammissibilità è dato dall'intersezione del dominio del problema

$$\mathbb{D} = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i,$$

che è un insieme convesso, con m *insiemi di sublivello* (detti sublevel sets) $\{\mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$ e p *iperpiani* $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = 0\}$.

Dunque, in un problema di ottimizzazione convessa, si minimizza una funzione convessa su un insieme convesso.

Una ampia gamma di problemi può essere risolta, in maniera efficiente, a mezzo dell'ottimizzazione convessa. Le difficoltà, ora, non risiedono nei metodi risolutivi, bensì nel riconoscere come e quando un

²Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è *affine* se è la somma di una funzione lineare $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e di una costante $c \in \mathbb{R}$, cioè se ha la forma seguente: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

generico problema di ottimizzazione possa essere ricondotto ad un problema di ottimizzazione convessa, ed essere quindi risolto come tale. Inoltre, i problemi di ottimizzazione convessa godono di diverse proprietà, quale ad esempio la globale ottimalità dei punti di ottimo locale; un minimo locale sarà anche un minimo globale. Per di più si osservi come, trattando funzioni differenziabili, sia immediato determinare punti appartenenti all'insieme di ottimalità.

E' da notare inoltre, che sotto condizioni aggiuntive minimali, un problema di ottimizzazione convessa, differentemente dai generici problemi non convessi, è *computazionalmente trattabile*, cioè l'onere computazionale necessario per la risoluzione del problema presenta un andamento polinomiale con la dimensione del problema e con la precisione richiesta.

Un'utile generalizzazione della forma standard del problema (1.2) è ottenuta utilizzando le *disuguaglianze generalizzate*³ nei vincoli e permettendo alle relative funzioni vincolari di essere a valore vettoriale:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \preceq_{K_i} \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (1.3)$$

Si fa riferimento a tale problema come *problema di ottimizzazione convessa in forma standard con vincoli di disuguaglianza generalizzati*.

1.3 Problemi di Ottimizzazione Convessa

In questa sezione vengono presentati i più comuni problemi di ottimizzazione convessa, quali:

- Semidefinite Program (*SDP*);
- Quadratic Program (*QP*);
- Second-Order Cone Program (*SOCP*).

³Una *disuguaglianza generalizzata* è rappresentata dal simbolo \preceq_K (\succeq_K) ed è così definita: $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$. Esiste anche quella stretta (\prec (\succ)), così definita: $\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \text{int } K$. L'insieme K che definisce una disuguaglianza generalizzata è un **cono** convesso, chiuso, solido e a punta, e la notazione $\text{int } K$ indica l'*interno* dell'insieme K . Un insieme K è detto **cono** se $\forall \mathbf{x} \in K$ e $\theta \geq 0$, si ha $\theta \mathbf{x} \in K$; tale insieme è un *cono convesso* se è convesso ed è un cono.

1.3.1 Semidefinite Program (*SDP*)

Tra i problemi di ottimizzazione convessa con disuguaglianze generalizzate i più semplici sono i problemi in forma conica, che presentano una funzione obiettivo lineare e una funzione vincolare di disuguaglianza affine.

Quando il cono K che definisce la disuguaglianza generalizzata è il cono delle matrici semidefinite positive (indicato con \mathbb{S}_+^k), il problema in forma conica associato è chiamato *SDP* (*Semidefinite Program*) [1, Cap 4]. Un *SDP* è un problema che si presenta nella seguente espressione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & x_1 \mathbf{F}_1 + \dots + x_n \mathbf{F}_n + \mathbf{G} \preceq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.4)$$

dove la variabile di ottimizzazione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{G}, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n \in \mathbb{S}^k$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei coefficienti e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ è il vettore dei termini noti, $(\cdot)^T$ denota l'operatore di trasposto. Il simbolo \preceq denota una disuguaglianza generalizzata in cui è stato omesso il pedice per semplicità di notazione. Il vincolo di disuguaglianza è un vincolo matriciale lineare: questi tipi di vincoli sono noti come *LMI* (*Linear Matrix Inequalities*) [2, Cap 2].

1.3.2 Quadratic Program (*QP*)

Il problema di ottimizzazione convessa (1.2) è detto un *QP* (*Quadratic Program*) [1, Cap 4] se la funzione obiettivo è quadratica (oltre che convessa), e se le funzioni vincolari sono affini. Un *QP* può essere espresso nella seguente forma:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + r \\ \text{subject to} & \mathbf{G} \mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.5)$$

dove la variabile di ottimizzazione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{P} \in \mathbb{S}_+^n$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$. Dunque, in un problema *QP* si minimizza una funzione quadratica convessa su un poliedro⁴.

⁴Un *poliedro* è l'intersezione di un numero finito di semispazi e iperpiani.

Quadratically Constrained Quadratic Program (*QCQP*)

Se nel problema di ottimizzazione convessa (1.2), oltre alla funzione obiettivo, anche le funzioni vincolari relative ai vincoli di disuguaglianza sono quadratiche convesse, il problema diviene:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.6)$$

dove la variabile di ottimizzazione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{P}_i \in \mathbb{S}_+^n$, $i = 0, 1, \dots, m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0, r_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Tale problema prende il nome di *QCQP*⁵, ossia un problema quadratico con vincoli quadratici. In un *QCQP*, quindi, si minimizza una funzione quadratica convessa su di una regione ammissibile data dall'intersezione di ellissoidi⁶ (quando $\mathbf{P}_i \succeq 0$).

1.3.3 Second-Order Cone Program (*SOCP*)

Un problema intimamente legato alla programmazione quadratica è il *SOCP* (*Second-Order Cone Program*) [1, Cap 4], che presenta la seguente forma:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g}, \end{cases} \quad (1.7)$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è la variabile di ottimizzazione; $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$. Il simbolo $\|\cdot\|_2$ denota la *norma Euclidea*. Il nome dato a questo tipo di problema deriva dal primo vincolo:

$$\|\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}\|_2 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d,$$

⁵ *QCQP* sta appunto per *Quadratically Constrained Quadratic Program*.

⁶ Gli *ellissoidi* sono una famiglia di insiemi convessi che hanno la forma:

$$\mathbb{E} = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq 1\},$$

dove la variabile di ottimizzazione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ 0$. Il vettore $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^n$ è il centro dell'ellissoide e la matrice \mathbf{P} determina per quanto si estende l'ellissoide in ogni direzione da \mathbf{x}_c .

che equivale a richiedere che la funzione affine ($\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d$) stia nel *cono di secondo ordine*⁷ in \mathbb{R}^{k+1} (con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$).

Quando $\mathbf{c}_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, il *SOCP* (1.7) è equivalente ad un *QCQP* (che si ottiene elevando al quadrato ambo i membri del primo vincolo del problema (1.7)).

1.4 Dualità Lagrangiana

Si consideri il generico problema di ottimizzazione (1.1), si supponga che il suo dominio \mathbb{D} sia non-vuoto, si indichi con p^* il valore ottimo trovato e non si faccia alcuna ipotesi di convessità sul problema.

L'idea di base nella *Dualità Lagrangiana* [1, Cap 5] è di tenere in conto i vincoli del problema incrementando la funzione obiettivo con una somma pesata delle funzioni vincolari.

Si definisce il *Lagrangiano* $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ associato al problema (1.1) come:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x}),$$

con $\text{dom } L = \mathbb{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. λ_i e ν_i sono detti *Moltiplicatori di Lagrange*, mentre i vettori $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\nu}$ sono le cosiddette *variabili duali* associate al problema (1.1).

Si definisce, poi, la *funzione duale di Lagrange* (o semplicemente *funzione duale*) $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ come quella funzione delle variabili duali che restituisce il valore minimo del Lagrangiano rispetto al vettore \mathbf{x} , per $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$:

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x}) \right).$$

La funzione duale fornisce dei limiti inferiori al valore ottimo p^* del problema (1.1): infatti per $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ e per qualsiasi $\boldsymbol{\nu}$, si ha:

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq p^*. \quad (1.8)$$

⁷Il *cono di secondo ordine* è così definito:

$$C = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}.$$

Il cono del secondo ordine è conosciuto sotto diversi nomi. E' chiamato *cono quadratico*, dato che è definito da una disequazione quadratica, o anche *cono gelato*, data la sua forma.

Quando il Lagrangiano non è limitato inferiormente in \mathbf{x} , la funzione duale assume il valore $-\infty$: in tal caso la disequazione (1.8) continua ad essere valida ma non è significativa. La funzione duale fornisce un limite inferiore non banale su p^* solo quando $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) > -\infty$.

1.4.1 Problema Duale di Lagrange

Se per ogni coppia $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ con $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ la funzione duale di Lagrange restituisce un limite inferiore al valore ottimo p^* del problema di ottimizzazione (1.1), è lecito chiedersi quale sia il miglior limite inferiore che può essere ottenuto dalla funzione duale. Questo quesito conduce alla formulazione di un nuovo problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{maximize} & g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.9)$$

chiamato *problema duale di Lagrange* associato al problema (1.1). In questo contesto il problema iniziale (1.1) è talvolta chiamato *problema primale*. Si definisce, inoltre, la coppia $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*)$ *ottimo duale* (o *moltiplicatori di Lagrange ottimi*) se risulta essere ottima per il problema (1.9).

Il problema duale di Lagrange (1.2) è un problema di ottimizzazione convessa, dato che la funzione obiettivo da massimizzare è concava e il vincolo è convesso. Ciò è vero indipendentemente dal fatto che il problema primale (1.1) sia convesso o meno.

La soluzione ottima del problema duale (1.9) restituisce, quindi, il migliore limite inferiore alla soluzione ottima p^* del problema primale (1.1). In particolare, indicando con d^* la soluzione ottima del problema duale di Lagrange, per essa vale la seguente relazione:

$$d^* \leq p^*.$$

Questa proprietà è nota come *dualità debole*, e vale anche se il problema primale non è convesso. Tale proprietà continua ad essere valida anche quando p^* e d^* non sono limitate, ossia infinite. Quindi, se per esempio, il problema primale non è limitato inferiormente, cioè $p^* = -\infty$, si deve avere $d^* = -\infty$, cioè il problema duale di Lagrange è inammissibile. Invece, se il problema duale non è limitato superiormente, cioè $d^* = \infty$, si deve avere $p^* = \infty$, cioè il problema primale è inammissibile.

La dualità debole può venire in aiuto per trovare un limite inferiore al

valore ottimo di un problema che presenta una non semplice risoluzione, dal momento che il problema duale è sempre convesso e in molti casi può essere risolto in maniera efficiente.

Si definisce il *duality gap* la differenza tra i valori delle funzioni obiettivo del primale e del duale: $p^* - d^*$. Dalla dualità debole, discende che tale differenza è sempre non-negativa.

Nel caso in cui valga l'uguaglianza:

$$d^* = p^*,$$

ovvero quando il duality gap è pari a zero, vale la *dualità forte*.

In generale la dualità forte non vale, ma se il problema primale (1.1) è convesso, ossia:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{cases}$$

con f_0, \dots, f_m convesse, la dualità forte è tipicamente (anche se non sempre) verificata. Esistono diversi risultati teorici che impongono condizioni al problema, oltre la convessità, sotto le quali vale la dualità forte. Queste condizioni sono chiamate *constraint qualifications*.

Un semplice esempio di constraint qualification è rappresentato dalla *condizione di Slater* [1, Cap 5]: se esiste un $\mathbf{x} \in \text{Relint}\mathbb{D}^8$ tale che:

$$f_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.10)$$

allora vale la dualità forte. Tipicamente un siffatto punto \mathbf{x} è detto *strettamente ammissibile*, dato che i vincoli di disuguaglianza sono soddisfatti con segno di disuguaglianza stretta.

La condizione di Slater può essere ridefinita quando alcune delle funzioni vincolari di disuguaglianza f_i sono affini. Se le prime k funzioni vincolari di disuguaglianza f_1, \dots, f_k sono affini, affinché valga la dualità forte deve essere soddisfatta la seguente condizioni (più debole di quella generale): se esiste un $\mathbf{x} \in \text{Relint}\mathbb{D}$ tale che:

$$f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad f_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = k + 1, \dots, m, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

allora vale la dualità forte. In altre parole, per i vincoli di disuguaglianza, con funzioni affini, non è necessario che questi siano soddisfatti con il segno di disuguaglianza stretta.

⁸ $\mathbf{x} \in \text{Relint}\mathbb{D}$ indica l'interno relativo di \mathbb{D} .

1.5 Rilassamento

Come si è discusso ampiamente nelle precedenti sezioni, gran parte dei problemi di ottimizzazione convessa presenta un onere computazionale sostenibile, presentando quest'ultimo andamento di tipo polinomiale con la dimensione del problema e con la precisione richiesta. Di contro, i problemi non convessi, anche chiamati NP-hard, in generale (fatta eccezione per alcune classi speciali) non sono numericamente trattabili, essendo caratterizzati da una complessità computazionale, legata alla loro risoluzione, che cresce esponenzialmente con la dimensione del problema e con la precisione richiesta; diverse motivazioni di carattere teorico spingono a supporre che questa sia una peculiarità intrinseca dei problemi non convessi, piuttosto che una limitazione delle odierne tecniche computazionali.

A valle di ciò è chiaro che l'ottimizzazione convessa giochi un ruolo di cruciale importanza anche nei problemi non convessi, come i problemi di ottimizzazione non lineare (in cui la funzione obiettivo o le funzioni vincolari non sono lineari) [3]. Nello specifico l'ottimizzazione convessa può essere adottata per determinare limiti al valore ottimo del problema NP-hard ed anche per determinare buoni, ma non necessariamente ottimi, punti ammissibili.

Si focalizzi l'attenzione su di una particolare classe di problemi non lineari come i problemi quadratici con vincoli quadratici non convessi. L'espressione più generale di un *QCQP* non convesso è la seguente:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.12)$$

dove la variabile di ottimizzazione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{P}_i \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$, e $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$. Bisogna considerare il caso in cui almeno una delle matrici \mathbf{P}_i non sia semidefinita positiva, altrimenti il problema è convesso e di facile risoluzione.

Si introducono due tecniche dette di *rilassamento* [3], che restituiscono un lower bound sul valore ottimo del suddetto problema *QCQP* non convesso:

- la programmazione semidefinita (*SDP*);
- la dualità Lagrangiana.

1.5.1 Rilassamento in un SDP

Tenendo conto della relazione $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{P}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T))$, dove $\text{Tr}(\cdot)$ denota l'operatore di traccia di una matrice, è possibile esprimere il problema (1.12) come segue:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_0) + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_i) + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T. \end{cases} \quad (1.13)$$

Il rilassamento di questo problema in uno di tipo convesso può essere effettuato direttamente, sostituendo il vincolo non convesso di uguaglianza $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ con un vincolo (convesso) semidefinito positivo $\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \succeq \mathbf{0}$. In tal modo si ottiene un lower bound sul valore ottimo del problema (1.12) risolvendo il seguente problema convesso:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_0) + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_i) + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{X} \succeq \mathbf{x}\mathbf{x}^T. \end{cases} \quad (1.14)$$

L'ultimo vincolo è convesso e può essere formulato usando la tecnica del complemento di Schur [1, Appendix A]:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_0) + \mathbf{q}_0^T \mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{P}_i) + \mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.15)$$

che è un SDP , ed è per tal motivo che è chiamato *rilassamento SDP* del $QCQP$ originale non convesso.

1.5.2 Rilassamento Lagrangiano

Di seguito viene trattata un'altra metodologia per ottenere un lower bound, semplicemente calcolabile, sul valore ottimo del $QCQP$ non convesso.

Si consideri nuovamente il problema iniziale (1.12): il relativo Lagrangiano è il seguente:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{P}_i) \mathbf{x} + (\mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i)^T \mathbf{x} + r_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i.$$

Per determinare la funzione duale viene effettuata una minimizzazione su \mathbf{x} . In particolare, denotando con $R(\mathbf{P})$ il range della matrice \mathbf{P} , si considera la formula generale [3]:

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + r = \begin{cases} r - \frac{1}{4} \mathbf{q}^T \mathbf{P}^H \mathbf{q}, & \mathbf{P} \succeq \mathbf{0} \\ & \mathbf{q} \in R(\mathbf{P}) \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.16)$$

La funzione duale è quindi:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}) &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i \right)^T \left(\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{P}_i \right)^H \left(\mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i + r_0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ora si può formulare il duale del problema (1.12) utilizzando i complementi di Schur:

$$\begin{cases} \text{maximize} & \gamma + \sum_{i=1}^m \lambda_i r_i + r_0 \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{P}_i) & \frac{(\mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i)}{2} \\ \frac{(\mathbf{q}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i)^T}{2} & -\gamma \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.18)$$

nella variabile $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. Anche qui si è ottenuto un *SDP*, detto *rilassamento Lagrangiano* del *QCQP* non convesso, che restituisce un lower bound sul valore ottimo del problema iniziale. Per quanto concerne la relazione tra i due tipi di rilassamenti, essendo uno il duale dell'altro, i bounds sono esattamente gli stessi.

Dualità Forte

La dualità debole implica che il valore ottimo del rilassamento Lagrangiano è un lower bound per il problema originale. In alcuni casi particolari, anche quando il problema originale non è convesso, il duality gap è nullo ed il rilassamento Lagrangiano produce il valore ottimo. Questo significa che, sotto particolari ipotesi, i problemi (1.12) ed (1.18) nelle variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, rispettivamente, forniscono lo stesso valore ottimo anche se il primo è non convesso. Occorre sottolineare che mentre il problema originale potrebbe essere non convesso, il suo duale è un *SDP* e quindi di semplice risoluzione.

1.6 Ottimizzazione Vettoriale

In questa sezione si considera il caso di *funzione obiettivo* a valore vettoriale. Un generico problema di ottimizzazione vettoriale si esprime nel modo seguente:

$$\begin{cases} \text{minimize (with respect to } \mathbb{K}) & \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (1.19)$$

La sola differenza rispetto al problema standard (1.1) è che qui la *funzione obiettivo* ha valori in \mathbb{R}^q e la specifica del problema include un cono proprio \mathbb{K} utilizzato per confrontare i valori della funzione obiettivo.

Il problema di ottimizzazione vettoriale (1.19) è un *problema di ottimizzazione vettoriale convesso* se la funzione obiettivo è \mathbb{K} -convessa, le funzioni vincolari di disuguaglianza sono convesse, e le funzioni vincolari di uguaglianza sono affini. Due valori della funzione obiettivo vanno confrontati con riferimento al cono \mathbb{K} , ossia nel senso delle disuguaglianze generalizzate precedentemente introdotte.

Ciò che determina maggiore confusione nell'ambito dell'ottimizzazione vettoriale è che due valori della funzione obiettivo non devono essere necessariamente confrontabili, ossia un valore non deve risultare necessariamente migliore dell'altro, cosa che, invece, non potrà mai verificarsi nel caso di funzione obiettivo scalare.

Quando un problema di ottimizzazione vettoriale ha un valore ottimo esso è anche unico ed è il valore minimo dell'insieme \mathcal{O} dei valori

ammissibili della funzione obiettivo:

$$\mathcal{O} = \left\{ \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad \begin{array}{l} f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right\} \subseteq \mathbf{R}^q$$

Ottimi di Pareto

Nella maggior parte dei problemi di ottimizzazione vettoriale di interesse accade che il suddetto insieme non è dotato di elemento minimo, per cui il problema non ha un punto di ottimo ed un valore ottimo. Diciamo che un punto ammissibile \mathbf{x} è un *punto ottimo di Pareto* se $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ è un elemento minimale dell'insieme \mathcal{O} , ossia non è possibile trovare altri valori della \mathbf{f}_0 che abbiano delle componenti di valore inferiore senza che altre componenti assumano un valore superiore. In tal caso $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ è un *valore ottimo di Pareto* per il problema di ottimizzazione vettoriale (1.19).

Un problema di ottimizzazione vettoriale può avere molti valori ottimi di Pareto. In tal caso l'insieme \mathcal{P} dei valori ottimi di Pareto è contenuto o coincide con la *frontiera* dell'insieme \mathcal{O} dei valori ammissibili della funzione obiettivo (indicata con $\mathbf{bd} \mathcal{O}$): ogni valore ottimo di Pareto è un valore ammissibile della funzione obiettivo che giace sulla frontiera di \mathcal{O} :

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O} \cap \mathbf{bd} \mathcal{O}$$

1.6.1 Scalarizzazione

La *scalarizzazione* rappresenta una tecnica standard per trovare gli *ottimi di Pareto* in un problema di ottimizzazione vettoriale.

Sia scelto un qualsiasi $\boldsymbol{\lambda} \succ_{k^*} \mathbf{0}$, ossia un qualsiasi vettore che sia positivo nel senso della disuguaglianza generalizzata duale; allora si considera il seguente problema scalare di ottimizzazione:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \begin{array}{l} f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Sia \mathbf{x} un punto ottimo per tale problema scalare, allora \mathbf{x} è un ottimo di Pareto per il problema di ottimizzazione vettoriale (1.19). Tramite il metodo della scalarizzazione è possibile trovare ottimi di Pareto per qualunque problema di ottimizzazione vettoriale, semplicemente risolvendo il problema scalare (1.20). Il vettore $\boldsymbol{\lambda}$ è detto *vettore dei*

pesi di Pareto e deve soddisfare il vincolo $\lambda \succ_{k^*} 0$. Esso costituisce un parametro libero e variandolo arbitrariamente si possono ottenere diverse (ma non sempre distinte) soluzioni ottime di Pareto per il problema (1.19). Variando le componenti di λ è possibile esplorare *quasi* tutto l'insieme degli ottimi di Pareto: va sottolineato, infatti, che non tutti gli ottimi di Pareto possono essere trovati via scalarizzazione.

Supponiamo che il nostro problema vettoriale (1.19) sia convesso; allora il problema scalarizzato (1.20) è anch'esso convesso dato che $\lambda^T \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ è una funzione convessa (a valori scalari). I problemi vettoriali convessi godono di un'importante proprietà: per tali problemi il metodo della scalarizzazione è in grado di fornire *tutti* gli ottimi di Pareto; ogni soluzione del problema scalarizzato, con $\lambda \succ_{k^*} 0$, è un punto ottimo di Pareto.

Quando un problema di ottimizzazione vettoriale coinvolge il cono $\mathcal{K} = \mathbb{R}^q_+$ esso è detto problema di ottimizzazione *multicriterio* o *multi-obiettivo*. Le componenti della funzione obiettivo $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$, che chiamiamo F_1, \dots, F_q , possono essere interpretate come q differenti funzioni obiettivo ognuna delle quali si vuole minimizzare.

Tale problema è convesso se le f_1, \dots, f_m sono convesse, le h_1, \dots, h_p sono affini, e le funzioni obiettivo F_1, \dots, F_q sono convesse.

In un problema multicriterio un punto ottimo \mathbf{x}^* soddisfa :

$$F_i(\mathbf{x}^*) \leq F_i(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, q$$

per ogni punto \mathbf{y} ammissibile. Quando esiste un punto ottimo le funzioni obiettivo non competono fra loro, ossia non va scelto fra di esse nessun compromesso in quanto il punto ottimo \mathbf{x}^* è contemporaneamente ottimo per ognuno dei q problemi scalari in cui le funzioni obiettivo sono le componenti della funzione obiettivo del nostro problema multicriterio. Un punto ammissibile \mathbf{x}^{po} è un ottimo di Pareto se, presa una \mathbf{y} ammissibile per cui risulta $F_i(\mathbf{y}) \leq F_i(\mathbf{x}^{po})$ per $i = 1, \dots, q$, allora deve risultare che $F_i(\mathbf{x}^{po}) = F_i(\mathbf{y})$, per $i = 1, \dots, q$.

Il metodo della scalarizzazione può essere interpretato geometricamente: un punto \mathbf{x} è un ottimo per il problema scalarizzato (1.20) se e solo se $\lambda^T(\mathbf{f}_0(\mathbf{y}) - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})) \geq 0$ per tutte le \mathbf{y} ammissibili. Ma ciò è equivalente ad affermare che $\{\mathbf{u} \mid -\lambda^T(\mathbf{u} - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})) = 0\}$ è un iperpiano di supporto all'insieme \mathcal{O} dei valori ammissibili nel punto $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$. Per cui, quando si trova un ottimo per il problema scalarizzato, si trova non solo un ottimo di Pareto per il problema di ottimizzazione vettoriale

originale, ma troviamo anche un intero semispazio in \mathbf{R}^q di valori della funzione obiettivo non ottenibili:

$$\{\mathbf{u} \mid \lambda^T(\mathbf{u} - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})) < 0\}$$

L'*ottimo paretiano* o *efficienza paretiana* è un concetto introdotto dall'ingegnere ed economista italiano Vilfredo Pareto, largamente applicato in economia, teoria dei giochi e scienze sociali, oltre che nell'ingegneria. Si realizza quando l'allocazione delle risorse è tale per cui non è possibile apportare miglioramenti paretiani al sistema, cioè non è possibile migliorare la condizione di un soggetto (nel nostro caso una funzione obiettivo) senza peggiorare la condizione di un altro.

Risulta chiaro che nella ricerca di buoni punti, in un problema multicriterio, possiamo restringere la nostra ricerca ai punti che sono ottimi di Pareto.

1.6.2 Trade-off analysis

Supponiamo che \mathbf{x} e \mathbf{y} siano punti ottimi di Pareto per cui risulta:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{x}) &< F_i(\mathbf{y}), & i \in \mathcal{A} \\ F_i(\mathbf{x}) &= F_i(\mathbf{y}), & i \in \mathcal{B} \\ F_i(\mathbf{x}) &> F_i(\mathbf{y}), & i \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

ossia \mathcal{A} è l'insieme degli indici associati alle funzioni obiettivo per cui \mathbf{x} batte \mathbf{y} , \mathcal{B} è l'insieme degli indici per cui \mathbf{x} ed \mathbf{y} forniscono gli stessi valori delle funzioni obiettivo, e \mathcal{C} è l'insieme degli indici associati a quelle funzioni obiettivo in cui \mathbf{y} batte \mathbf{x} . Quando confrontiamo due diversi ottimi di Pareto essi o forniscono gli stessi valori delle funzioni obiettivo, oppure ciascuno batte l'altro in almeno una funzione obiettivo. Nel confronto del punto \mathbf{x} col punto \mathbf{y} si dice che abbiamo *negoziato* migliori valori delle funzioni obiettivo con indice $i \in \mathcal{A}$ con valori peggiori delle funzioni obiettivo con indice $i \in \mathcal{C}$. L'analisi trade-off ci dice di quanto si deve peggiorare i valori di una o alcune funzioni obiettivo al fine di migliorare il valore di altre.

L'insieme dei valori ottimi di Pareto per un problema multicriterio è detto *superficie ottima di trade-off* oppure, quando $q = 2$, *curva ottima di trade-off*; questo perchè non ha senso considerare punti che non sono ottimi di Pareto, per cui possiamo restringere a questi ultimi la nostra trade-off analysis. Effettuare un'analisi trade-off significa proprio andare ad esplorare i punti di tale superficie.

Nel caso di un problema convesso bi-criterio la curva ottima di trade-off è di facile interpretazione. La pendenza della curva in un suo punto (cui è associato un valore ottimo di Pareto) mostra il trade-off locale, cioè il trade-off delle due funzioni obiettivo nell'intorno di quel valore ottimo di Pareto. Nei punti in cui la pendenza è ripida negoziamo piccole variazioni della funzione obiettivo i cui valori sono rappresentati sull'asse delle ascisse con grandi variazioni di valore dell'altra funzione obiettivo. In molte applicazioni delle buone soluzioni di compromesso sono rappresentate dai punti a grande curvatura in cui peggioramenti relativamente piccoli del valore di una funzione possono solo essere accompagnati da miglioramenti relativamente grandi dei valori dell'altra.

1.7 Il Problema di Ottimizzazione *MAXDET*

Un problema di ottimizzazione *MAXDET* presenta la seguente forma:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \log \det \mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \\ \text{subject to} & \mathbf{G}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

dove la variabile di ottimizzazione è data dal vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Le funzioni $\mathbf{G} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l \times l}$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ sono affini:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_0 + x_1 \mathbf{G}_1 + \cdots + x_m \mathbf{G}_m$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + x_1 \mathbf{F}_1 + \cdots + x_m \mathbf{F}_m$$

dove $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T$ e $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T$, cioè sono matrici *simmetriche*.

Ci si riferisce al problema (1.21) come ad un problema di ottimizzazione *MAXDET* in forma *standard*.

In molti casi il termine $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ può essere assente e di fatto, il problema (1.3) si riduce alla massimizzazione del determinante della matrice $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ vincolata alle LMI.

Il problema (1.21) è un problema di ottimizzazione convessa in quanto la funzione obiettivo $\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \log \det \mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1}$ è una funzione convessa e l'insieme di ammissibilità è convesso. In particolare il problema *MAXDET* è una estensione dei problemi di programmazione semidefinita e pertanto include, come casi particolari, una grande varietà di problemi di ottimizzazione convessa; inoltre, le disuguaglianze LMI sono rappresentative di molti comuni vincoli convessi tra i quali figurano: le disuguaglianze

lineari, disuguaglianze quadratiche convesse, le norme matriciali [4] e i vincoli sugli autovalori.

Come esempio di vincolo che può essere ricondotto a delle LMI si consideri la disuguaglianza:

$$\text{cond}(\mathbf{\Sigma}) \leq k_{\max}, \quad (1.22)$$

dove: $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ è una matrice hermitiana mentre k_{\max} è una costante pre-assegnata. Con la notazione $\text{cond}(\mathbf{\Sigma})$ si è indicato il numero di condizionamento della matrice $\mathbf{\Sigma}$ definito come:

$$\text{cond}(\mathbf{\Sigma}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{\Sigma})}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma})},$$

dove con $\lambda_{\max}(\mathbf{\Sigma})$ e $\lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma})$ si sono rispettivamente indicati il più grande ed il più piccolo autovalore della matrice $\mathbf{\Sigma}$.

E' semplice notare che la (1.22) è un vincolo sugli autovalori della matrice $\mathbf{\Sigma}$ ed inoltre è possibile mostrare che esso può essere riscritto come un vincolo LMI del tipo: $u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Sigma} \preceq k_{\max}u\mathbf{I}$ cioè vale la seguente equivalenza:

$$\text{cond}(\mathbf{\Sigma}) \leq k_{\max} \iff u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Sigma} \preceq k_{\max}u\mathbf{I}, \quad (1.23)$$

dove $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ sta ad indicare che la matrice $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ è *semidefinita positiva* mentre $u \in \mathbb{R}^{++}$.

E' possibile ritrovare problemi come quello presentato nella (1.3) in molte discipline, quali: l'algebra lineare, la statistica e la teoria dell'informazione.

Essendo un problema di ottimizzazione che rientra nella categoria dei problemi di programmazione convessa, il *MAXDET*, può essere efficientemente risolto utilizzando l'algoritmo del *punto interiore*.

Capitolo 2

Rivelazione e Classificazione di Segnali Radar

2.1 Introduzione

La funzione principale di un sistema radar è quella di rilevare la presenza di un eventuale bersaglio. Per tale ragione, in alcuni contesti operativi, si viene a creare l'esigenza di disturbare tale funzionalità. Il mascheramento della presenza di un bersaglio alla stazione radar è un argomento di forte interesse, soprattutto in ambito militare, ed avviene grazie all'utilizzo delle cosiddette tecniche ECM (Electronic Counter Measures) [5], [6].

Le tecniche ECM, adottate contro radar ad inseguimento, fanno spesso utilizzo di sistemi DFRM (Digital Frequency Radio Memory) [7]. Il DFRM è un dispositivo in cui è utilizzata una memoria ad alta velocità di campionamento per l'archiviazione e la rigenerazione di un segnale a radiofrequenza al fine di ingannare i radar nemici. In un sistema DFRM, il segnale a radiofrequenza di ingresso è generalmente prima traslato verso frequenze più basse per poi essere filtrato e campionato a mezzo di un convertitore analogico-digitale (ADC, Analog to Digital Converter) ad alta velocità. I campioni sono conservati in una memoria e poi manipolati in ampiezza, frequenza e fase, per generare un ampio spettro di segnali ingannevoli. I campioni memorizzati vengono poi elaborati da un convertitore digitale-analogico (DAC, Digital to Analog Converter), shiftati nella banda di interesse e poi ritrasmessi al sistema radar vittima.

In questo Capitolo è stato considerato il problema della rivelazione

di un bersaglio e di disturbo intenzionale, in una cella sotto test (CUT, Cell Under Test), al fine di eseguire una corretta classificazione degli stessi. La reiezione del disturbo intenzionale è di primaria importanza per sistemi radar ad inseguimento, la cui efficacia ed efficienza dipendono anche dal massimo numero di tracce perse a causa del disturbo intenzionale. Quasi tutti i moderni sistemi radar ad inseguimento incorporano tecniche per contrastare le contromisure elettroniche. Le cosiddette tecniche ECCM (Electronic Counter Counter Measures) [8], sopprimono automaticamente i disturbi intenzionali, e, possono essere:

- *antenna based*;
- *transmitter based*;
- *receiver based*;
- *signal processing based*.

In questo Capitolo, si è considerato il problema della rivelazione e classificazione radar in presenza di segnali retro-diffusi da un bersaglio reale e disturbo intenzionale generato da un sistema DFRM. Il fine ultimo è quello di stabilire una strategia congiunta di rivelazione e classificazione, capace di determinare, con elevato grado di affidabilità, la presenza di segnale utile o di disturbo intenzionale. In particolare, l'approccio seguito è quello di un ricevitore a due stadi.

2.2 Primo problema di rivelazione e classificazione

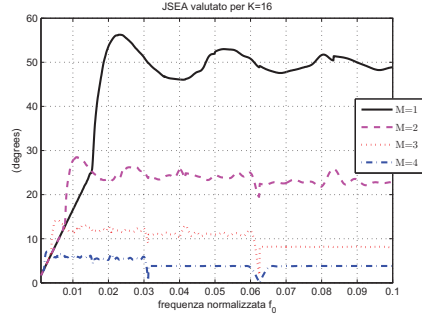
Nello scenario in esame, il segnale retro-diffuso dal bersaglio e il disturbo intenzionale non sono ortogonali, ma il loro vettore di puntamento differisce per un angolo a causa dell'errore introdotto dal DFRM.

Per quantificare tale errore, si introduce il parametro μ (o *JSEA*, Jamming Signal Error Angle). Per la sua valutazione si adopera il coseno generalizzato [10]

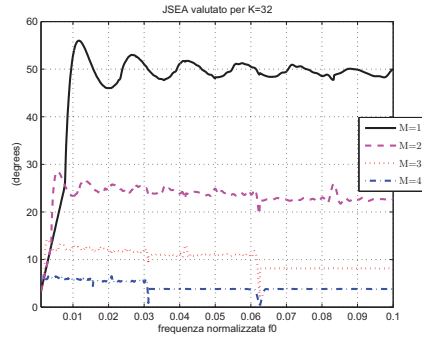
$$\rho = \cos(\mu) = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{x}^H \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2}, \quad (2.1)$$

ossia, il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori complessi \mathbf{x} e \mathbf{y} . L'angolo μ dipende da alcuni parametri del DFRM, quali: numero di

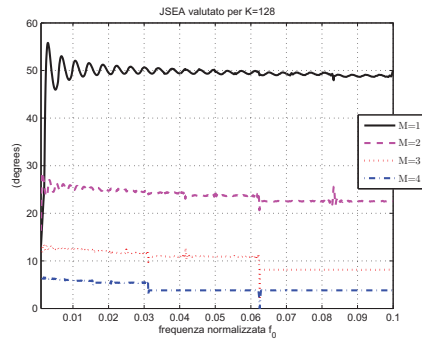
livelli di quantizzazione $N = 2^M$, frequenza normalizzata f_0 e numero di campioni K . In Figura 2.1 sono riportati alcuni andamenti del $JSEA$ in funzione di f_0 per $M = 1, 2, 3, 4$, e $K = 16$, $K = 32$ e $K = 128$



(a) $JSEA$ per $K = 16$.



(b) $JSEA$ per $K = 32$.



(c) $JSEA$ per $K = 128$.

Figura 2.1: $JSEA$ in funzione di f_0 al variare del numero di campioni K .

I risultati numerici mostrano che minore è il numero di bit utilizzati per la quantizzazione, tanto più l'angolo μ è significativo. Quindi, tale angolo può essere utilizzato in un ricevitore radar per individuare il disturbo intenzionale ed evitare in tal modo una falsa rivelazione. Viceversa, se il valore di M è elevato, l'angolo μ è circa pari zero e quindi non risulterà facile distinguere i due segnali.

2.2.1 Schema di rivelazione e classificazione

Il problema di rivelazione e classificazione è qui formulato come un test ad ipotesi multiple (MHT, Multiple Hypothesis Test) sul vettore osservabile $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{K-1}]^T$, acquisito dal radar durante il ToT, dove K è il numero di campioni collezionati dal radar. L'approccio in [9] è quello di un ricevitore a due stadi. Sotto l'ipotesi nulla H_0 , l'osservabile

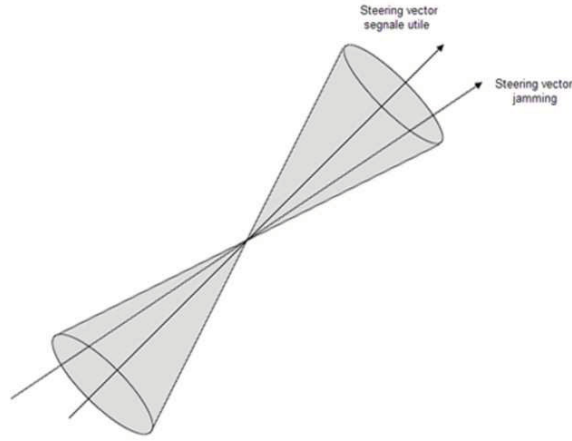


Figura 2.2: Interpretazione del *JSEA* e natura conica del problema.

consta unicamente di rumore \mathbf{d} (rumore termico più clutter). Sotto le due ipotesi alternative è implicitamente assunto che l'osservabile consta della somma di rumore e segnale retro-diffuso dal bersaglio o dal dispositivo di disturbo nemico. Dunque si formula il test ad ipotesi multiple come segue:

$$\begin{cases} H_0 : & \mathbf{z} = \mathbf{d} \\ H_k : & \mathbf{z} = \mathbf{d} + \mathbf{s}_k \quad k = 1, 2, \end{cases}$$

dove $\mathbf{s}_1 = \alpha \mathbf{p}$ è il vettore relativo al bersaglio, α è un parametro non noto; \mathbf{p} è il vettore di puntamento del segnale utile, assunto noto a priori; $p(n) = e^{j2\pi f_D n}$, dove f_D è la frequenza Doppler relativa al bersaglio, normalizzata alla frequenza di ripetizione di impulso del radar (PRF). Il vettore relativo al disturbo intenzionale è dato da $\mathbf{s}_2 = \beta \mathbf{p}_j$, dove β ed il vettore di puntamento \mathbf{p}_j non sono noti al ricevitore, essendo il jammer generato dal DFRM. Il disturbo, rumore naturale, (dato dalla sovrapposizione di rumore termico e disturbo colorato) è modellato come un vettore aleatorio complesso Gaussiano con media nulla e matrice di covarianza $\mathbf{M} = E\{\mathbf{d}\mathbf{d}^H\}$. In notazione sintetica $\mathbf{d} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{M})$. Nella seguente trattazione si ipotizza che \mathbf{M} sia una matrice a rango pieno nota a priori. In realtà \mathbf{M} deve essere stimata da dati secondari.

Si denotino con $P_k = \Pr\{H_k\}$ le probabilità a priori relative alle ipotesi H_k per $k = 0, 1, 2$. Lo schema di rivelazione e classificazione ha lo scopo di rivelare la presenza di un bersaglio o di disturbo intenzionale e di effettuare una corretta classificazione.

Se $P_0, P_1, P_2, \alpha, \beta$ e \mathbf{p}_j fossero noti si potrebbe utilizzare il criterio a massima probabilità a posteriori (MAP) e decidere in favore di una delle tre ipotesi in accordo con la regola seguente:

$$\hat{H}_k : \bar{k} = \arg \max_k f_{\mathbf{z}/H_k}(\mathbf{z}/H_k) P_k .$$

Purtroppo non si ha la conoscenza a priori di P_0, P_1, P_2 e quindi il criterio MAP non è applicabile.

Operando con un ricevitore a singolo stadio, nonostante non si abbia la conoscenza a priori di P_0, P_1, P_2 , si potrebbe lavorare con un rivelatore costituito da due filtri adattati: il primo adattato al segnale utile, il secondo adattato al disturbo intenzionale. Di seguito si potrebbe fare un test dell'ipotesi H_1 contro H_0 e H_2 contro H_0 , rispettivamente: le differenze tra le statistiche di questi due test rappresenterebbero la statistica del test H_1 contro H_2 . Purtroppo non si ha la conoscenza a priori del vettore di puntamento del disturbo intenzionale \mathbf{p}_j , quindi non è possibile costruire un filtro adattato a tale segnale e pertanto tale test non è implementabile.

Date queste considerazioni, viene proposto qui uno schema di rivelazione e classificazione a due stadi. Il primo stadio è dedicato al test di ipotesi cumulativa $\{H_1 \cup H_2\}$ contro l'ipotesi H_0 . Tale sezione di

decisione è realizzata mediante un AMF:

$$l_{AMF}(\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}|^2}{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}} \underset{H_0}{\overset{H_1+H_2}{>}} \eta. \quad (2.2)$$

Se la soglia η è superata è dichiarata la rivelazione. La soglia η è fissata in funzione della probabilità di falso allarme che il sistema radar può tollerare.

Il secondo stadio è dedicato alla fase di classificazione, che consiste nella discriminazione del segnale utile dal disturbo intenzionale. Le pdf (funzioni densità di probabilità) del vettore degli osservabili \mathbf{z} condizionate alle ipotesi H_1 e H_2 sono date dalle seguenti espressioni:

$$f(\mathbf{z}/H_1) = \frac{1}{\pi^K \det^K(\mathbf{M})} \exp [-(\mathbf{z} - \mathbf{s}_1)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{s}_1)], \quad (2.3)$$

$$f(\mathbf{z}/H_2) = \frac{1}{\pi^K \det^K(\mathbf{M})} \exp [-(\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)]. \quad (2.4)$$

Nel seguito, viene prima derivato il rivelatore chiaroveggente che ha conoscenza del vettore di puntamento \mathbf{p}_j . Le prestazioni di tale rivelatore rappresentano un limite ultimo alle prestazioni di un decisore che non ha tale conoscenza a priori. Le probabilità a priori non sono note; si assume che le probabilità relative al bersaglio e al disturbo intenzionale siano uguali, ossia $P_1 = P_2 = (1 - P_0)/2$, con P_0 non nota. Entrambe le ipotesi sono composte, dato che entrambe le ampiezze complesse α e β sono non note. Conseguentemente la classificazione chiaroveggente implementa la seguente regola di decisione:

$$\Lambda_{CV}(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\alpha} \exp [-(\mathbf{z} - \alpha \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{p})]}{\max_{\beta} \exp [-(\mathbf{z} - \beta \mathbf{p}_j)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \beta \mathbf{p}_j)]} \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{P_1}{P_2} = 1, \quad (2.5)$$

dove il pedice CV sta per chiaroveggente. Tale regola di decisione (2.5) non è realistica poichè in scenari reali il vettore di puntamento \mathbf{p}_j non è noto.

Dato che \mathbf{p}_j non è noto, un approccio che conduce ad un sistema implementabile è quello basato sul GLRT. E' comunque necessario tener conto di una certa informazione a priori relativa al vettore di puntamento \mathbf{p}_j , che chiaramente può essere sfruttata; infatti, dal paragrafo relativo al modello del segnale di disturbo intenzionale, è noto che \mathbf{p}_j giace in un

cono C il cui asse è dato dalla direzione nominale del segnale utile e la cui ampiezza è regolata dal $JSEA$ μ . Il $JSEA$ è funzione del numero di bit utilizzati per la quantizzazione, dalla frequenza f_0 e dal numero di campioni K ; in notazione sintetica $\mathbf{s}_2 = \beta \mathbf{p}_j \in C$. Tale informazione rappresenta un vincolo che deve essere portato in conto nella derivazione del classificatore. Per sfruttare tale informazione, si formula il test GLRT come segue [9]:

$$\Lambda_{GLRT}(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\alpha} \exp [-(\mathbf{z} - \alpha \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \alpha \mathbf{p})]}{\max_{\mathbf{s}_2 \in C} \exp [-(\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)]} \stackrel{H_1}{>} \frac{P_1}{P_2} \stackrel{H_2}{<} 1. \quad (2.6)$$

Il problema della massimizzazione del denominatore di (2.6) è stato risolto da Besson [11]. Ne vengono riepilogati di seguito i principali risultati. Bisogna considerare due casi $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{z} \notin C \\ \text{(ii)} & \mathbf{z} \in C \end{cases}$.

- (i) Se il vettore osservabile $\mathbf{z} \notin C$, lo stimatore ML del vettore di disturbo intenzionale è:

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \arg \min_{\mathbf{s}_2 \in C} (\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_2).$$

Tale minimizzazione non presenta una soluzione in forma chiusa; si può ricorrere, allora, alla tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Nello specifico, il Lagrangiano può essere scritto come:

$$L(\mathbf{s}_2, \lambda) = (\mathbf{z} - \mathbf{s}_2)^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_2) + \lambda(\xi \|\mathbf{s}_2\|_2 \|\mathbf{p}\|_2 - |\mathbf{s}_2^H \mathbf{p}|),$$

dove $\xi = \cos^2(\theta)$, θ (proporzionale a μ) è l'angolo caratterizzante la regione conica C , $\lambda \geq 0$ è il moltiplicatore di Lagrange. Si definiscono le matrici $\mathbf{Q} = \xi \mathbf{I} - \mathbf{p}\mathbf{p}^H$ e $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} + \lambda \mathbf{Q}$. Il vettore \mathbf{s}_2 che minimizza $L(\mathbf{s}_2, \lambda)$ è dato da:

$$\hat{\mathbf{s}}_{2_{ML}} = \mathbf{W} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}.$$

Il valore λ deve essere ancora valutato. Occorre determinare lo zero della funzione $g(\lambda) = \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}$ nell'intervallo $\lambda \in [0, -1/\gamma_m]$, dove γ_m è il più piccolo autovalore negativo della matrice $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{M}^{1/2}$. Tale zero è unico data la stretta monotonia della funzione $g(\lambda)$. Una volta determinato l'unico valore λ_0 che annulla la funzione $g(\lambda)$ nell'intervallo sopraindicato, viene determinato $\hat{\mathbf{s}}_{2_{ML}} = \hat{\mathbf{s}}_2(\lambda_0)$.

(ii) Viceversa, se il vettore osservabile $\mathbf{z} \in C$, lo stimatore ML di \mathbf{s}_2 è:

$$\hat{\mathbf{s}}_{2ML} = \mathbf{z}.$$

Noto che:

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}}{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}},$$

si sono sostituite le espressioni di $\hat{\mathbf{s}}_{2ML}$ e $\hat{\alpha}_{ML}$ in (2.6), si è effettuato il logaritmo ad ambo i membri, pervenendo alla seguente strategia di decisione:

$$l_{GLRT}(\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}|^2}{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}} - 2\Re \{ \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{s}}_{2ML} \} + \hat{\mathbf{s}}_{2ML}^H \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{s}}_{2ML} =$$

$$l_{AMF}(\mathbf{z}) - 2\Re \{ \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{s}}_{2ML} \} + \hat{\mathbf{s}}_{2ML}^H \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{s}}_{2ML} \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} 0. \quad (2.7)$$

Sintetizzando, lo schema di rivelazione e classificazione è composto da due stadi, come mostrato in Figura 2.3. Il primo stadio è un

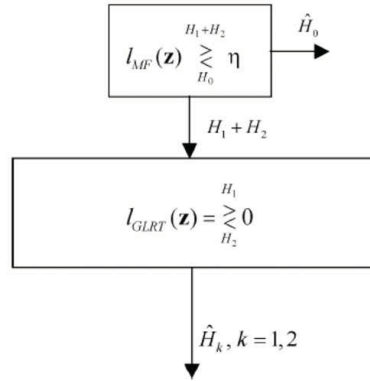


Figura 2.3: Schema di classificazione/rivelazione.

filtro adattato (al segnale utile sbiancato) che testa l'ipotesi H_0 contro l'ipotesi cumulativa $\{H_1 \cup H_2\}$. Se la soglia η è superata, si

dichiara rivelazione. In questo caso, il secondo stadio esegue una procedura per classificare tale segnale come relativo ad un bersaglio o relativo ad un jammer. Nella prossima sezione sono analizzate le prestazioni del sistema complessivo.

2.2.2 Analisi delle prestazioni

Per la valutazione delle prestazioni del sistema complessivo si calcolano, in seguito, la probabilità di falso allarme (P_{FA}), la probabilità di rivelazione (P_D) e la probabilità di corretta classificazione (P_C).

La **probabilità di falso allarme** è data dalla probabilità di dichiarare la presenza di segnale significativo, relativo o al bersaglio o al disturbo intenzionale, quando l'ipotesi nulla è quella corretta. Conseguentemente $P_{FA} = \Pr \{l_{AMF}(\mathbf{z}) > \eta/H_0\}$. Si dimostra che nel caso di analisi risulta $P_{FA} = \exp(-\eta)$.

La **probabilità di rivelazione** è definita come la probabilità di dichiarare la presenza di segnale significativo, qualsiasi sia la classe di appartenenza del segnale ricevuto (bersaglio reale o disturbo intenzionale), quindi:

$$P_D = \frac{P_1}{P_1 + P_2} P_{D/H_1} + \frac{P_2}{P_1 + P_2} P_{D/H_2},$$

dove, indicando con $H_{1,2} = H_1 \cup H_2$,

$$P_{D/H_1} = \Pr \left\{ \hat{H}_{1,2}/H_1 \right\} = \Pr \{l_{AMF}(\mathbf{z}) > \eta/H_1\},$$

$$P_{D/H_2} = \Pr \left\{ \hat{H}_{1,2}/H_2 \right\} = \Pr \{l_{AMF}(\mathbf{z}) > \eta/H_2\}.$$

La **probabilità di corretta classificazione** è definita come la probabilità di dichiarare la corretta ipotesi a seconda della presenza del bersaglio o del disturbo intenzionale, conseguentemente:

$$P_C = \frac{P_1}{P_1 + P_2} P_{C/H_1} + \frac{P_2}{P_1 + P_2} P_{C/H_2},$$

dove $P_{C/H_k} = \Pr \left\{ \hat{H}_k/H_k \right\}$, per $k = 1, 2$, quindi per l'AMF e per il GLRT si avrà:

$$P_{C/H_1} = \Pr \{l_{AMF}(\mathbf{z}) > \eta, l_{GLRT}(\mathbf{z}) > 0/H_1\}, \quad (2.8)$$

$$P_{C/H_2} = \Pr \{l_{AMF}(\mathbf{z}) > \eta, l_{GLRT}(\mathbf{z}) < 0/H_2\}. \quad (2.9)$$

Nel caso di analisi

$$P_C = (1/2) P_{C/H_1} + (1/2) P_{C/H_2} , \quad (2.10)$$

avendo assunto $P_1 = P_2 = 1/2$. Dato che P_C (2.10) non può essere calcolata in forma chiusa, per la sua valutazione si farà utilizzo delle simulazioni Monte Carlo.

Si definiscono il rapporto segnale-rumore, riferito al bersaglio, come $SNR_t = \sigma_\alpha^2 / \sigma_d^2$ (il pedice t sta per target) e quello riferito al disturbo intenzionale come $SNR_j = \sigma_\beta^2 / \sigma_d^2$ (il pedice j sta per jamming).

Il vettore di puntamento del disturbo intenzionale \mathbf{p}_j è stato normalizzato al fine di avere la stessa norma di \mathbf{p} . Per quanto concerne la matrice di covarianza del rumore, si è modellato l'elemento di posto (i, j) come $\{\mathbf{M}\}_{i,j} = \sigma_d^2 \rho^{|i-j|}$, quindi sono stati analizzati differenti casi:

- bersagli non fluttuanti¹ in presenza di rumore Gaussiano bianco;
- bersagli non fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano colorato;
- bersagli fluttuanti² in presenza di rumore Gaussiano bianco;
- bersagli fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano colorato.

In Figura 2.4 ed in Figura 2.5 è riportata la probabilità P_C di corretta classificazione in funzione di SNR_j , dove è stato fissato $SNR_j = SNR_t = SNR$. La P_C è stata valutata mediante simulazioni Monte Carlo con un numero di prove pari a 1000. Si è fissata la soglia η del test AMF in modo tale ottenere una $P_{FA} = 10^{-4}$. In Figura 2.4 e Figura 2.5 sono mostrati gli andamenti delle probabilità di corretta classificazione P_C sia nel caso di bersagli non fluttuanti che nel caso di bersagli fluttuanti, e in presenza di rumore bianco che di rumore colorato ($\rho = 0.9$). Le curve, in queste figure, corrispondono a diversi valori di θ , l'angolo caratteristico della regione conica C ; si è posto $\theta = \delta\mu$, dove $\delta = [0.5; 0.7; 0.9; 1]$ è un parametro che modula l'ampiezza della regione conica C , μ è il $JSEA$. Mettendo a confronto Figura 2.4 e Figura 2.5 si osserva come il sistema complessivo restituisce prestazioni migliori in

¹Ci si riferisce a *bersagli non fluttuanti* quando l'ampiezza α dell'eco è una costante deterministica.

²Ci si riferisce a *bersagli fluttuanti* quando l'ampiezza α dei segnali retro-diffusi è modellata come una variabile aleatoria complessa Gaussiana a media 0 e varianza σ_α^2 , sinteticamente $\alpha \sim CN(0, \sigma_\alpha^2)$.

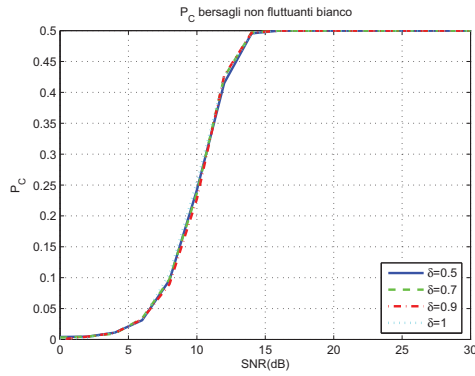
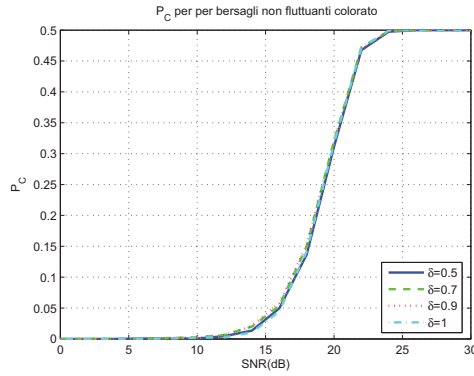
(a) P_C per rumore bianco.(b) P_C per $\rho = 0.9$.

Figura 2.4: Probabilità di corretta classificazione P_C per bersagli non fluttuanti al variare di δ . (a) in presenza di rumore bianco, (b) in presenza di rumore colorato $\rho = 0.9$. $K = 16$

presenza di rumore bianco rispetto a quello colorato. Inoltre, si può osservare che nel caso di bersagli non fluttuanti, la probabilità di corretta classificazione P_C tende più rapidamente al valore di saturazione (0.5) rispetto al caso di bersagli fluttuanti.

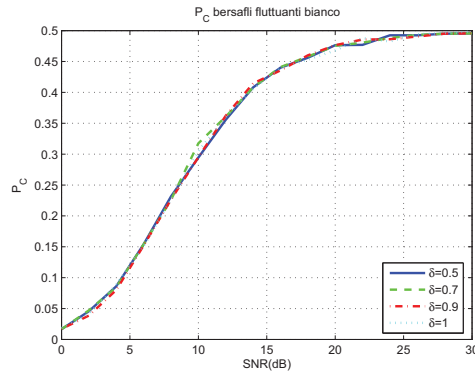
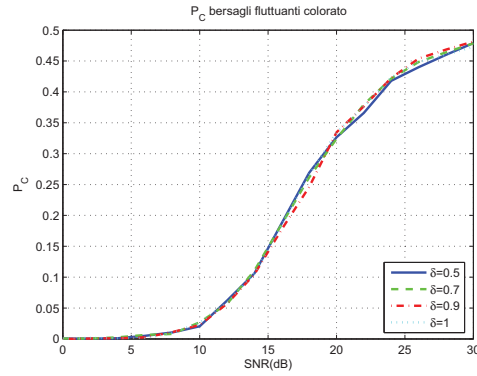
(a) P_C per rumore bianco.(b) P_C per $\rho = 0.9$.

Figura 2.5: Probabilità di corretta classificazione P_C per bersagli fluttuanti al variare di δ . (a) in presenza di rumore bianco, (b) in presenza di rumore colorato $\rho = 0.9$. $K = 16$

2.3 Secondo problema di rivelazione e classificazione

In questa sezione, viene presentato il secondo problema di rivelazione e classificazione. Lo scenario di analisi è analogo a quello presentato in sezione 2.2, data la presenza sia di segnali retro-diffusi da un bersaglio reale che di disturbo intenzionale, generato da un sistema DFRM. Si vuole determinare una strategia congiunta di rivelazione e classificazione, capace di determinare, con elevato grado di affidabilità, la presenza o di

segnale utile (ritorno da un bersaglio reale) o di disturbo intenzionale. Come in sezione 2.2, si utilizza un ricevitore a due stadi in cui:

- il primo stadio è costituito da un AMF. Ad esso è delegata la fase di rivelazione e sarà decretata la presenza di segnale significativo rispetto alla presenza di rumore naturale;
- il secondo stadio, in cascata al primo, è costituito da un classico test GLRT. Tale sezione è mirata alla fase di classificazione.

Una volta che il filtro AMF decreta la presenza di un segnale significativo, il secondo stadio classificherà il segnale significativo come segnale utile o come disturbo intenzionale, a seconda della natura dell'osservabile.

2.3.1 Schema di rivelazione e classificazione

Il problema di rivelazione e classificazione è qui formulato come un test di ipotesi multiple sul vettore osservabile $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{K-1}]^T$, acquisito dal radar durante il ToT, dove K è il numero di campioni collezionati dal radar durante un singolo impulso. L'approccio qui utilizzato è quello di un ricevitore a due stadi, date le informazioni a priori disponibili nel caso di analisi, ossia la natura conica del problema.

Sotto l'ipotesi nulla H_0 , l'osservabile consta unicamente di rumore naturale \mathbf{d} (rumore termico più clutter). Sotto le due ipotesi alternative è implicitamente assunto che l'osservabile consta della somma di rumore naturale e di segnale retro-diffuso dal bersaglio o emesso dal dispositivo di disturbo nemico.

Dunque, si formula il test ad ipotesi multiple come segue:

$$\begin{cases} H_0 : & \mathbf{z} = \mathbf{d} \\ H_1 : & \mathbf{z} = \mathbf{p} + \mathbf{d} \quad \mathbf{p} \in C_1 \\ H_2 : & \mathbf{z} = \mathbf{q} + \mathbf{d} \quad \mathbf{q} \in C_2 - C_1, \end{cases} \quad (2.11)$$

dove \mathbf{p} , è il vettore di puntamento del segnale utile, \mathbf{q} è il vettore di puntamento del disturbo intenzionale generato dal sistema jammer (DFRM). Il disturbo naturale è modellato come un vettore aleatorio complesso Gaussiano con media nulla e matrice di covarianza $\mathbf{M} = E[\mathbf{d}\mathbf{d}^H]$. In notazione sintetica $\mathbf{d} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{M})$. Nella seguente trattazione si ipotizza che \mathbf{M} sia una matrice a rango pieno nota a priori. In realtà \mathbf{M} deve essere stimata da dati secondari.

Dall'espressione del test di ipotesi multiple (2.11) si evince che \mathbf{p} appartiene all'insieme di forma conica C_1 , definito come:

$$C_1 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^K : \mathbf{p}^H \mathbf{R}_1 \mathbf{p} \leq 0\}$$

mentre \mathbf{q} appartiene all'insieme di forma conica $C_2 - C_1$, definito come:

$$C_2 - C_1 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^K : \mathbf{q}^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q} \leq 0, \mathbf{q}^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q} \leq 0\},$$

dove:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^H}{\|\mathbf{s}\|^2} - \gamma_1^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}_2 = \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^H}{\|\mathbf{s}\|^2} - \gamma_2^2 \mathbf{I}, \quad (2.12)$$

con $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$ (γ_1 e γ_2 sono rispettivamente i coseni degli angoli θ_p e θ_q caratterizzanti le regioni coniche C_1 e C_2), \mathbf{s} è l'asse del cono individuato dalla direzione nominale del segnale utile. I due insiemi di forma conica sono illustrati in Figura 2.6.

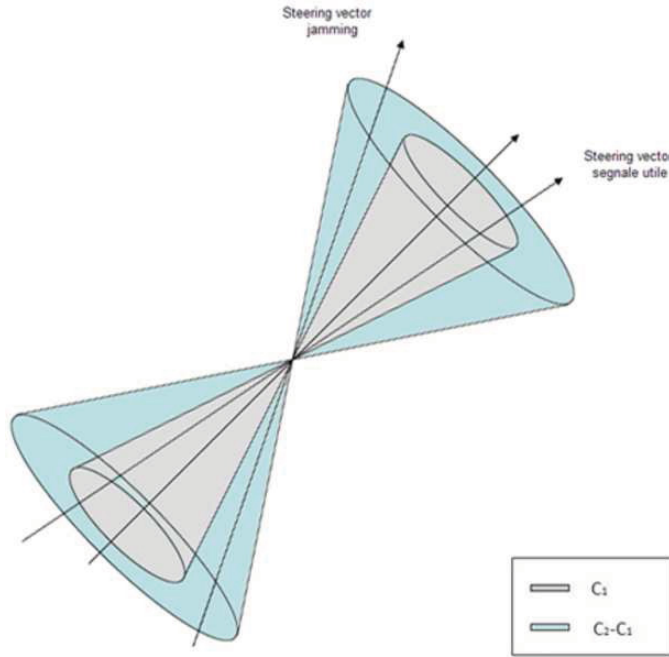


Figura 2.6: I due insiemi di forma conica C_1 e $C_2 - C_1$.

2.3.2 Soluzione Proposta

Si adotta uno schema di ricezione a due stadi. Al primo stadio, un filtro AMF (adattato a \mathbf{s}), è delegata la fase di rivelazione. L'AMF decreterà la presenza di segnale significativo a dispetto della presenza di solo rumore naturale a mezzo del seguente test:

$$l_{AMF}(\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}|^2}{\mathbf{s}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}} \underset{H_0}{\overset{H_1+H_2}{>}} \eta. \quad (2.13)$$

Se la soglia η è superata è dichiarata rivelazione. La soglia η è fissata in funzione della probabilità di falso allarme P_{FA} che il sistema radar può tollerare. Il secondo stadio è dedicato alla fase di classificazione. Una volta decretata la presenza di segnale significativo da parte dell'AMF, tale blocco discrimina la presenza di segnale utile dalla presenza di disturbo intenzionale. Tale fase di classificazione è implementata a mezzo del seguente test GLRT:

$$\Lambda_{GLRT}(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\mathbf{p} \in C_1} \exp [-(\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{p})]}{\max_{\mathbf{q} \in C_2 - C_1} \exp [-(\mathbf{z} - \mathbf{q})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{q})]} \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{P_1}{P_2} = 1, \quad (2.14)$$

ciò equivale a:

$$\Lambda_{GLRT}(\mathbf{z}) = \frac{\exp \left\{ - \min_{\mathbf{p} \in C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{p})] \right\}}{\exp \left\{ - \min_{\mathbf{q} \in C_2 - C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{q})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{q})] \right\}} \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{P_1}{P_2} = 1. \quad (2.15)$$

Operando il logaritmo naturale ad entrambi i membri della (2.15) si perviene alla seguente regola di decisione:

$$l_{GLRT}(\mathbf{z}) = - \min_{\mathbf{p} \in C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{p})] + \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \min_{\mathbf{q} \in C_2 - C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{q})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{q})] \underset{H_2}{<} 0. \quad (2.16)$$

Derivazione ML

In questa sezione sono presentate le minimizzazioni necessarie per eseguire il test GLRT (2.16). Viene dapprima presentato il calcolo di:

$$\min_{\mathbf{p} \in C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{p})] . \quad (2.17)$$

Al fine di determinare tale valore minimo, bisogna valutare lo stimatore ML di \mathbf{p} . Bisogna considerare due differenti casi: $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{z} \notin C_1 \\ \text{(ii)} & \mathbf{z} \in C_1 \end{cases}$.

- (i) Se il vettore osservabile $\mathbf{z} \notin C_1$, lo stimatore ML del vettore di puntamento del segnale utile è:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p} \notin C_1} [(\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{p})] .$$

Tale minimizzazione non presenta una soluzione in forma chiusa, ci si serve [11], quindi, della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$L(\mathbf{p}, \lambda) = (\mathbf{z} - \mathbf{p})^H \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{p}) + \lambda(|\mathbf{p}^H \mathbf{s}|^2 - \xi \|\mathbf{s}\|_2^2 \|\mathbf{p}\|_2^2) ,$$

dove $\xi = \gamma_1^2$ e $\lambda \geq 0$ è il moltiplicatore di Lagrange.

Definendo le matrici $\mathbf{Q}_u = \xi \mathbf{I} - \mathbf{p}\mathbf{p}^H$ e $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} + \lambda \mathbf{Q}_u$, il vettore $\hat{\mathbf{p}}_{ML}$ è dato da:

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} , \quad (2.18)$$

dove per determinare il valore di λ occorre annullare la funzione

$$g(\lambda) = -\mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_u \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}$$

nell'intervallo $\lambda \in [0, -1/\gamma_m]$, dove γ_m è il più piccolo autovalore negativo della matrice $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{Q}_u \mathbf{M}^{1/2}$. Tale zero è unico data la stretta monotonia della funzione $g(\lambda)$ [11]. Una volta determinato l'unico valore che annulla la funzione $g(\lambda)$ nell'intervallo sopraindicato, si è univocamente determinato $\hat{\mathbf{p}}_{ML}$.

- (ii) Viceversa, se il vettore osservabile $\mathbf{z} \in C_1$, lo stimatore ML del vettore di puntamento del segnale utile è:

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML} = \mathbf{z} . \quad (2.19)$$

Quindi, il valore ottimo di (2.17) è dato da:

$$[(z - \hat{p}_{ML})^H M^{-1}(z - \hat{p}_{ML})] \quad (2.20)$$

dove \hat{p}_{ML} è dato o in (2.18) o in (2.19), a seconda dell'angolo sotteso dal vettore osservabile con la direzione nominale del segnale utile.

La minimizzazione

$$\min_{\mathbf{q} \in C_2 - C_1} [(z - \mathbf{q})^H M^{-1}(z - \mathbf{q})], \quad (2.21)$$

invece, equivale a risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & (z - \mathbf{q})^H M^{-1}(z - \mathbf{q}) \\ \text{subject to} & \mathbf{q}^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q} \leq 0 \\ & \mathbf{q}^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q} \leq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Ciò equivale a:

$$\begin{cases} \text{minimize} & [z^H M^{-1} z - 2\Re\{z^H M^{-1} \mathbf{q}\} + \mathbf{q}^H M^{-1} \mathbf{q}] \\ \text{subject to} & \mathbf{q}^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q} \leq 0 \\ & \mathbf{q}^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q} \leq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

ovvero, un problema quadratico non convesso con due vincoli quadratici. Un siffatto problema è stato trattato dettagliatamente in [12, Cap 6], e, al fine di conformarsi alla trattazione degli autori, si definiscono le matrici \mathbf{B}_0 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 e \mathbf{B}_3 come:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} z^H M^{-1} z & (-M^{-1} z)^H \\ (-M^{-1} z) & M^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Tali matrici sono matrici a blocchi. Sia \mathbf{B}_k la generica matrice di dimensioni $(K+1) \times (K+1)$, e si denoti con $(\mathbf{B}_{ij})_{m \times n}$ la sua generica sotto-matrice a blocco di posizione (i, j) e dimensione $m \times n$, in modo che:

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{11})_{1 \times 1} & (\mathbf{B}_{12})_{1 \times K} \\ (\mathbf{B}_{21})_{K \times 1} & (\mathbf{B}_{22})_{K \times K} \end{bmatrix}.$$

Osservando che:

$$\mathbf{q}^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q} = \text{Tr} \left(\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) = \text{Tr}(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{q}^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q} = \text{Tr} \left(\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) = \text{Tr}(\mathbf{B}_2 \mathbf{Q})$$

ove la matrice \mathbf{Q} è definita come

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

il problema (2.23), può essere scritto nella equivalente forma matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{\mathbf{q}}{\text{minimize}} & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \\ \text{subject to} & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \leq 0 \\ & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q}^H \\ \mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Si ricordi, che un problema di ottimizzazione quadratico è omogeneo se sia la funzione obiettivo che le funzioni vincolari sono tutte forme quadratiche omogenee. Una versione omogenea del problema (2.25) è data da:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{\mathbf{q}, t}{\text{minimize}} & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_0 \begin{bmatrix} |t|^2 & t\mathbf{q}^H \\ t^*\mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \\ \text{subject to} & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} |t|^2 & t\mathbf{q}^H \\ t^*\mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \leq 0 \\ & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} |t|^2 & t\mathbf{q}^H \\ t^*\mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \leq 0 \\ & \text{Tr} \left(\mathbf{B}_3 \begin{bmatrix} |t|^2 & t\mathbf{q}^H \\ t^*\mathbf{q} & \mathbf{q}\mathbf{q}^H \end{bmatrix} \right) \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

E' semplice verificare che se $[t, \mathbf{q}^T]^T$ è una soluzione del problema (2.26), allora \mathbf{q}/t è una soluzione del problema (2.25). D'altra parte, se \mathbf{q} è una soluzione del problema (2.25), allora anche $[1, \mathbf{q}^T]^T$ è soluzione del problema (2.26). Anche i valori ottimi di ambo i problemi (2.26) e (2.25) coincidono. Conseguentemente, risolvere il problema (2.25) è equivalente a risolvere il problema (2.26).

Rilassando il vincolo di rango unitario sulla matrice \mathbf{Q} , qui assunta come variabile di ottimizzazione, si ha il rilassamento del problema (2.26):

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{Q}}{\text{minimize}} & \text{Tr}(\mathbf{B}_0 \mathbf{Q}) \\ \text{subject to} & \text{Tr}(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}) \leq 0 \\ & \text{Tr}(\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}) \leq 0 \\ & \text{Tr}(\mathbf{B}_3 \mathbf{Q}) = 1 \\ & \mathbf{Q} \succeq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Tale problema appartiene alla classe SDP ed è espresso in forma standard. Il problema duale associato ad esso è dato da:

$$\begin{cases} \underset{y_1, y_2, y_3}{\text{maximize}} & -y_3 \\ \text{subject to} & \mathbf{Y} = y_1 \mathbf{B}_1 + y_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0 + y_3 \mathbf{B}_3 \succeq 0 \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Stretta ammissibilità della soluzione QCQP

Si supponga che $\text{Int}(C_2 - C_1) \neq \emptyset$. Si vuole qui dimostrare la stretta ammissibilità del problema (2.27).

Sia \mathbf{q}_s una soluzione strettamente ammissibile del problema primale (2.23), cioè tale che:

$$\mathbf{q}_s^H \mathbf{q}_s = 1, \quad \mathbf{q}_s^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q}_s < 0, \quad \mathbf{q}_s^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q}_s < 0.$$

Sia \mathbf{Q}_s la matrice di dimensioni $(K+1) \times (K+1)$:

$$\mathbf{Q}_s = (1 - \eta) \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{q}_s \mathbf{q}_s^H \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_{K \times K} + \mathbf{q}_s \mathbf{q}_s^H \end{bmatrix},$$

si deve verificare che la matrice \mathbf{Q}_s soddisfa le tre seguenti condizioni:

$$1. \quad \text{Tr}(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_s) < 0;$$

2. $\text{Tr}(\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_s) < 0$;
3. $\text{Tr}(\mathbf{B}_3 \mathbf{Q}_s) = 1$;

E' dimostrato, qui di seguito, come effettivamente la scelta effettuata per la matrice \mathbf{Q}_s sia tale da soddisfare le tre condizioni sopraindicate. Si osservi che:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_s) &= (\mathbf{q}_s^H \mathbf{R}_1 \mathbf{q}_s) + \eta \text{Tr}(\mathbf{R}_1) \\ \text{Tr}(\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_s) &= (\mathbf{q}_s^H \mathbf{R}_2 \mathbf{q}_s) + \eta \text{Tr}(\mathbf{R}_2) \\ \text{Tr}(\mathbf{B}_3 \mathbf{Q}_s) &= 1.\end{aligned}$$

E' facile notare che una scelta opportuna di η rende \mathbf{Q}_s una soluzione strettamente ammissibile, in quanto $\text{Tr}(\mathbf{Q}_s \mathbf{R}_1) < 0$ e $\text{Tr}(\mathbf{Q}_s \mathbf{R}_2) < 0$.

Per quanto riguarda il problema duale (2.28), questo è strettamente ammissibile. Infatti, si supponga $\hat{y}_3 = 1$, affinché sia soddisfatto il vincolo $\mathbf{Y} \succeq 0$ bisogna verificare che la matrice $(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_3)$ sia definita positiva. Per tale ragione è stata considerata la suddetta matrice:

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} & (-\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z})^H \\ (-\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}) & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

e si è valutato il complemento di Schur rispetto all'elemento \mathbf{M}^{-1} , dato che la matrice \mathbf{M} è una matrice definita positiva (è una matrice di covarianza):

$$S = 1 + \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} - (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z})^H \mathbf{M} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}) = 1 > 0.$$

Osservando che S risulta sempre maggiore di zero, segue che la matrice $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_3$ è definita positiva. Quindi se si considerano \hat{y}_1 e \hat{y}_2 sufficientemente piccoli, il vincolo $\mathbf{Y} \succ 0$ risulta sempre soddisfatto. Da qui segue la stretta ammissibilità del problema duale.

A valle di queste considerazioni si è verificata la stretta ammissibilità dei problemi (2.27) e (2.28), ora si vuole verificare che il rilassamento di (2.26) in (2.27) è stretto.

Dal Teorema 1.4 [12, Cap 1], essendo (2.27) e (2.28) due problemi strettamente ammissibili, segue che il rilassamento di (2.26) in (2.27) è stretto, quindi (2.26) e (2.27) hanno lo stesso valore ottimo.

Infine, verificate la stretta ammissibilità del problema (2.25) e il rilassamento stretto, si è ora in grado di scrivere l'espressione finale del test

GLRT. Si denoti con $VSDP$ il valore ottimo del problema (2.27), ovvero

$$VSDP \begin{cases} \underset{\mathbf{Q}}{\text{minimize}} & \text{Tr}(\mathbf{B}_0 \mathbf{Q}) \\ \text{subject to} & \text{Tr}(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}) \leq 0 \\ & \text{Tr}(\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}) \leq 0 \\ & \text{Tr}(\mathbf{B}_3 \mathbf{Q}) = 1 \\ & \mathbf{Q} \succeq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Sostituendo in (2.16) i valori ottimi di (2.17) e (2.21), dati rispettivamente in (2.20) e (2.29), si giunge alla seguente regola di decisione:

$$VSDP - [(z - \hat{\mathbf{p}}_{ML})^H \mathbf{M}^{-1} (z - \hat{\mathbf{p}}_{ML})] \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} 0. \quad (2.30)$$

2.3.3 Analisi delle prestazioni

Per determinare le prestazioni del sistema complessivo, si valutano: la probabilità di falso allarme (P_{FA}), la probabilità di rivelazione (P_D) e la probabilità di corretta classificazione (P_C).

Il vettore di puntamento del disturbo intenzionale \mathbf{q} è stato normalizzato al fine di avere la stessa norma di \mathbf{p} . Per quanto concerne la matrice di covarianza del rumore naturale, si è modellato l'elemento di posto (i, j) come $\{\mathbf{M}\}_{i,j} = \sigma_d^2 \rho^{|i-j|}$, quindi sono analizzati due differenti casi:

1. rumore Gaussiano bianco;
2. rumore Gaussiano colorato ($\rho = 0.9$).

Il numero di campioni utilizzati K è stato scelto uguale ad 8 in entrambe i casi. Nello specifico sono stati analizzati quattro diversi casi:

- bersagli non fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano bianco;
- bersagli non fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano colorato;
- bersagli fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano bianco;
- bersagli fluttuanti in presenza di rumore Gaussiano colorato.

Bersagli non fluttuanti

In Figura 2.7a e in Figura 2.7b è mostrato l'andamento della probabilità di corretta classificazione P_C per bersagli non fluttuanti al variare degli angoli θ_p e θ_q , caratterizzanti le ampiezze delle regioni coniche C_1 e C_2 , in presenza di rumore bianco. Nello specifico in Figura 2.7a si è fissato $\theta_q = 25^\circ$ e si è fatto variare θ_p nell'intervallo $[5, 10, 20, 25]^\circ$, mentre in Figura 2.7b si è fissato $\theta_p = 10^\circ$ e si è fatto variare θ_q nell'intervallo $[25, 30, 35, 40]^\circ$.

Come si può osservare da tali figure θ_p è il parametro critico caratterizzante le prestazioni dell'intero sistema, dato che, le variazioni di θ_q influenzano in maniera meno significativa le prestazioni. Ciò significa che un apertura di $\theta_q = 25^\circ$ della regione C_2 è sufficiente per individuare, correttamente, il disturbo intenzionale. Al crescere di θ_p , all'interno del sopracitato intervallo, si può osservare un andamento della P_C che satura con una maggiore velocità, al crescere dell' SNR ; infatti con un apertura della regione conica C_1 a $\theta_p = 20^\circ$ la saturazione avviene già per valori dell' SNR vicini a 20dB.

In Figura 2.7c e in Figura 2.7d è mostrato l'andamento della probabilità di corretta classificazione P_C in presenza di bersagli non fluttuanti al variare degli angoli θ_p e θ_q , caratterizzanti le ampiezze delle regioni coniche C_1 e C_2 , assumendo rumore colorato ($\rho = 0.9$). Nello specifico in Figura 2.7c si è fissato $\theta_q = 25^\circ$ e si è fatto variare, ancora una volta, θ_p nell'intervallo $[5, 10, 15, 20]^\circ$, mentre in Figura 2.7d si è fissato $\theta_p = 10^\circ$ e si è fatto variare θ_q nell'intervallo $[25, 30, 35, 40]^\circ$. Coerentemente col caso precedente, anche qui il parametro critico caratterizzante le prestazioni è θ_p . Da Figura 2.7c si può osservare come al crescere di θ_p , fino a $\theta_p = 15^\circ$ si ottiene un incremento delle prestazioni.

Bersagli fluttuanti

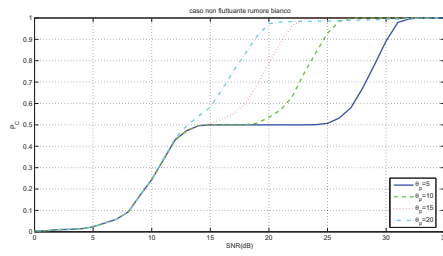
In Figura 2.8a e in Figura 2.8b è mostrato l'andamento della probabilità di corretta classificazione P_C in presenza di bersagli fluttuanti al variare degli angoli θ_p e θ_q , caratterizzanti le regioni coniche C_1 e C_2 , assumendo rumore bianco.

Nello specifico, in Figura 2.8a si è fissato $\theta_q = 25^\circ$ e si è fatto variare θ_p nell'intervallo $[5, 10, 20, 25]^\circ$, mentre in Figura 2.8b si è fissato $\theta_p = 10^\circ$ e si è fatto variare θ_q nell'intervallo $[25, 30, 35, 40]^\circ$. Confrontando tali prestazioni con i rispettivi analoghi in presenza di bersagli fluttuanti è

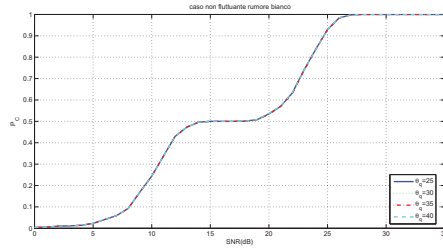
immediato notare un decremento delle prestazioni data la natura aleatoria delle ampiezze del segnale utile e del disturbo intenzionale. Come nei precedenti casi analizzati è θ_p a dettare l'andamento delle prestazioni dell'intero sistema, infatti ancora una volta non si apprezzano sensibili variazioni delle prestazioni al variare di θ_q . Con una maggiore apertura della regione conica C_2 si osserva un incremento della probabilità P_{C/H_1} con un conseguente effetto benefico sulla P_C che saturerà tanto più velocemente ad 1, al crescere dell' SNR , quanto maggiore sarà l'ampiezza della regione C_1 .

In Figura 2.8c e in Figura 2.8d è mostrato l'andamento della probabilità di corretta classificazione P_C in presenza di bersagli fluttuanti al variare degli angoli θ_p e θ_q , caratterizzanti le regioni coniche C_1 e C_2 assumendo rumore colorato ($\rho = 0.9$).

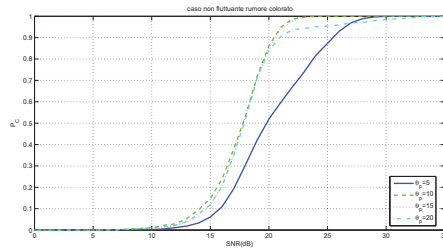
Nello specifico, in Figura 2.8c, si è fissato $\theta_q = 25^\circ$ e si è fatto variare θ_p nell'intervallo $[5, 10, 15, 20]^\circ$, mentre in Figura 2.8d si è fissato $\theta_p = 10^\circ$ e si è fatto variare θ_q nell'intervallo $[25, 30, 35, 40]^\circ$. Ancora una volta il parametro che decreta l'andamento della P_C è θ_p . Come in presenza di rumore bianco si nota un decremento delle prestazioni rispetto al caso di bersagli non fluttuanti. Ciò è imputabile alla natura aleatoria delle ampiezze del segnale utile e del disturbo intenzionale. Come in Figura 2.7c si osserva che per $\theta_p = 20^\circ$ si ha una inversione di tendenza nell'andamento della P_C in funzione di θ_p . Se in precedenza, nell'intervallo $[5, 10, 15]^\circ$, si osservava un incremento delle prestazioni al crescere di θ_p , per $\theta_p = 20^\circ$ le prestazioni subiscono un decremento rispetto ai valori della P_C ottenuti per $\theta_p = 15^\circ$. Come nell'analogo caso in presenza di bersagli non fluttuanti, l'angolo sotteso tra i vettori di puntamento del segnale utile e del disturbo intenzionale, in assenza di rumore naturale, è all'incirca 22° . Per alti valori di SNR con un apertura di $\theta_p = 20^\circ$ si osserva che la P_{C/H_2} deteriora, dato che in tale caso vi sarà la possibilità di rilevare la contemporanea presenza di segnale utile e di disturbo intenzionale quando vi è presente unicamente il disturbo intenzionale. Ciò determinerà un calo della P_{C/H_2} con un conseguente calo della P_C .



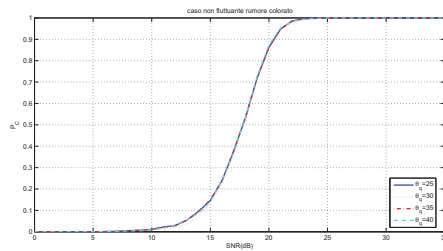
(a) P_C per rumore bianco, $\theta_q = 25^\circ$ al variare di θ_p .



(b) P_C per rumore bianco, $\theta_p = 10^\circ$ al variare di θ_q .

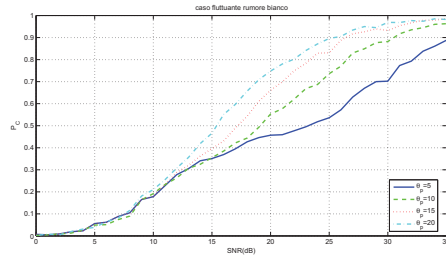


(c) P_C per $\rho = 0.9$, $\theta_q = 25^\circ$ al variare di θ_p .

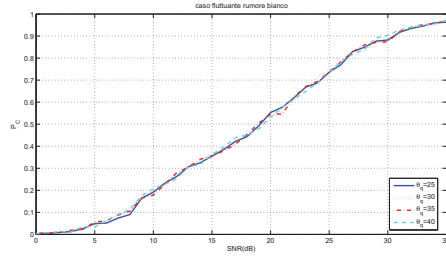


(d) P_C per $\rho = 0.9$, $\theta_p = 10^\circ$ al variare di θ_q .

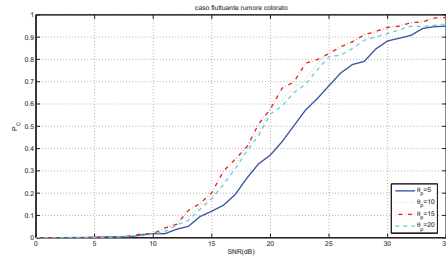
Figura 2.7: P_C per bersagli non fluttuanti al variare di θ_p e θ_q ; (a) e (c) $\theta_p \in [5, 10, 15, 20]^\circ$ e $\theta_q = 25^\circ$, (b) e (d) $\theta_q \in [25, 30, 35, 40]^\circ$ e $\theta_p = 10^\circ$. Rumore bianco per (a) e (b). Rumore colorato ($\rho = 0.9$) per (c) e (d). $K = 8$



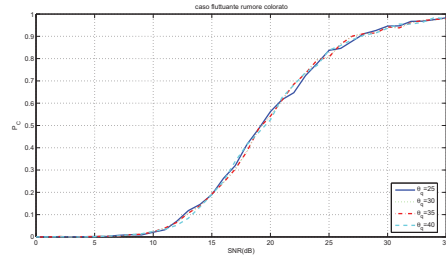
(a) P_C per rumore bianco, $\theta_q = 25^\circ$ al variare di θ_p .



(b) P_C per rumore bianco, $\theta_p = 10^\circ$ al variare di θ_q .



(c) P_C per $\rho = 0.9$, $\theta_q = 25^\circ$ al variare di θ_p .



(d) P_C per $\rho = 0.9$, $\theta_p = 10^\circ$ al variare di θ_q .

Figura 2.8: P_C per bersagli fluttuanti al variare di θ_p e θ_q ; (a) e (c) $\theta_p \in [5, 10, 15, 20]^\circ$ e $\theta_q = 25^\circ$, (b) e (d) $\theta_q \in [25, 30, 35, 40]^\circ$ e $\theta_p = 10^\circ$. Rumore bianco per (a) e (b). Rumore colorato ($\rho = 0.9$) per (c) e (d). $K = 8$

2.4 Conclusioni e Sviluppi Futuri

Sono stati considerati ed analizzati due problemi di rivelazione e classificazione. In entrambi i problemi si è utilizzata una strategia di ricezione a due stadi: il primo di rivelazione ed il secondo di classificazione.

Inizialmente, è stato presentato il primo problema di rivelazione e classificazione. In tale scenario il vettore di puntamento del disturbo intenzionale giace all'interno di una regione conica C . Si è risolto il problema della rivelazione e classificazione a mezzo di una strategia a due stadi. Al primo stadio è delegata la fase di rivelazione, a mezzo di un filtro AMF; quindi in tale stadio si discrimina la presenza di segnale significativo (utile o di disturbo intenzionale) dalla presenza di solo rumore. Al secondo stadio, un test GLRT, è delegato alla fase di classificazione. Precisamente, si classificherà il segnale significativo, proveniente dal precedente stadio, come o segnale utile o come disturbo intenzionale.

Di tale sistema se ne sono valutate le prestazioni in termini di probabilità di corretta classificazione P_C al variare dell'ampiezza della regione conica C , al variare dell' SNR , assumendo sia disturbo Gaussiano bianco che colorato.

Successivamente, è stato presentato il secondo problema di rivelazione e classificazione. Il vettore di puntamento del segnale utile giace all'interno di una regione conica C_1 , il cui asse è dato dalla direzione nominale del segnale utile e la cui ampiezza è θ_p . Il vettore di puntamento del disturbo intenzionale giace all'interno della corona conica $C_1 - C_2$: la regione C_1 è quella precedentemente introdotta; la regione C_2 , ha anch'essa come asse la direzione nominale del segnale utile, mentre la sua ampiezza è regolata dall'angolo θ_q . Anche per questo problema è stato utilizzato uno schema di rivelazione e classificazione a due stadi: il primo stadio, relativo alla fase di rivelazione, è un filtro AMF mentre il secondo stadio, relativo alla fase di classificazione, è un test GLRT. Per la derivazione analitica del test GLRT si è fatto utilizzo della teoria dell'ottimizzazione convessa, introdotta nel Capitolo 1; infatti è stata determinata la soluzione ad un problema $QCQP$ non convesso, e si è verificata l'esistenza di tale soluzione. Della nuova strategia, si sono valuate le prestazioni in termini di P_C al variare di θ_p , θ_q e dell' SNR , considerando e la presenza di rumore Gaussiano sia bianco che colorato. I risultati numerici mostrano come tale sistema restituisca delle prestazioni molto attraenti; la proba-

bilità di corretta classificazione P_C tende ad 1, al crescere dell' SNR , e al variare di θ_p e θ_q .

Possibili sviluppi futuri riguardano l'implementazione delle tecniche studiate su dati reali. E' inoltre di interesse la loro analisi in presenza di clutter non Gaussiano.

Capitolo 3

Progetto di Filtri Disadattati mediante Ottimizzazione Convessa

3.1 Introduzione

In questo Capitolo, viene presentato il progetto di filtri disadattati (*mismatched filters*), che saranno in seguito indicati come filtri MMF. In particolare, il punto centrale della trattazione sarà la progettazione di tali filtri attraverso gli strumenti forniti dalla teoria dell'ottimizzazione convessa.

Dopo una breve introduzione ai sistemi radar e alle problematiche ad essi associate, viene presentata la progettazione di filtri riceventi disadattati ottimizzati rispetto ad alcune metriche rilevanti, considerate prima separatamente poi in combinazione.

La trattazione è stata particolarizzata al contesto dei sistemi radar, ma ciò non toglie che la teoria, ed i metodi di progetto presentati, risultano di particolare interesse (e dunque di fattibile applicazione) anche nel contesto di rilevamento attivo¹, quali i sistemi sonar, l'esplorazione sismica, e l'imaging biomedico.

¹Un sistema di rilevamento è definito *attivo* se è dotato di una propria sorgente di trasmissione per cui esso si basa sulla ricezione dei propri segnali riflessi. Altrimenti esso è definito *passivo*.

3.2 Note sui sistemi radar

In un sistema radar il sensore, atto alla rivelazione del bersaglio, invia un impulso alla ricerca di un bersaglio che rifletta il segnale; dal segnale retro-diffuso si possono estrarre informazioni relative alla posizione e alla velocità del bersaglio. Per ottenere tali informazioni il segnale retro-diffuso deve essere opportunamente elaborato dal ricevitore [15]. I filtri più comunemente utilizzati per tale scopo sono i filtri adattati o MF (matched filter), ossia filtri adattati al segnale trasmesso e tali, quindi, da massimizzare il rapporto segnale rumore in uscita ad esso sotto opportune ipotesi.

Si supponga, ad esempio, di voler rilevare la distanza di un bersaglio puntiforme immerso nello spazio libero; il segnale da esso riflesso sarà una versione attenuata e ritardata del segnale trasmesso.

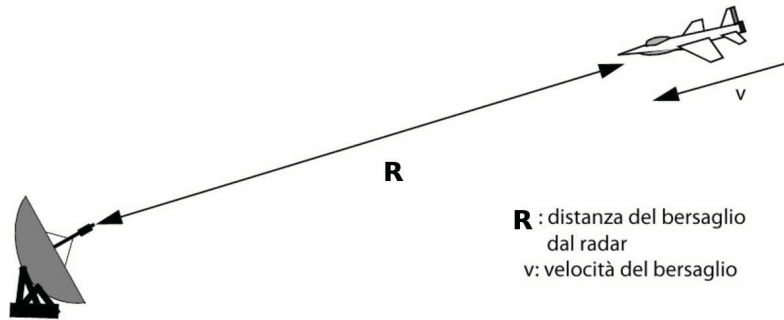


Figura 3.1: Rappresentazione di un sistema radar.

Trascurando il termine di attenuazione, il filtro MF in ricezione fornisce in uscita l'autocorrelazione del segnale trasmesso, traslata sull'asse dei ritardi di un valore τ legato alla distanza tra bersaglio e radar dalla relazione $R = c\tau/2$, ove c è la velocità di propagazione del segnale nel mezzo.

Come è noto, il valore massimo della funzione di autocorrelazione di un segnale, coincidente con il picco del suo lobo centrale, è pari all'energia del segnale stesso. La larghezza del lobo centrale dell'autocorrelazione del segnale trasmesso è direttamente proporzionale alla risoluzione in range del sistema, definita come la minima differenza in range affinché due bersagli siano rivelati come due oggetti distinti. Nel caso in cui i due

bersagli differiscano in range di una quantità pari almeno alla risoluzione, i relativi lobi centrali, in uscita al filtro MF, non saranno sovrapposti ed i due oggetti risulteranno risolvibili.

L'analisi delle problematiche associate all'estrazione delle informazioni dai segnali radar non può prescindere dalla considerazione dei segnali trasmessi. Un singolo impulso non modulato ha una buona risoluzione in range ($\Delta R = cT/2$ ove T è la durata dell'impulso) solo se esso è molto stretto, cioè di breve durata. Tuttavia, per una data energia per impulso trasmesso, un impulso molto breve richiede una potenza istantanea molto elevata che risulta spesso inaccettabile per la maggior parte dei sistemi. Tale osservazione ha portato alla nascita ed all'utilizzo delle tecniche di *compressione di impulso* che permettono di migliorare la risoluzione in range di un sistema di rilevamento attivo garantendo valori praticamente accettabili dei picchi di potenza in trasmissione. Esistono varie tecniche di codifica di impulso; quella che viene qui considerata è la *codifica di fase*.

Un impulso di durata T viene suddiviso in N sottoimpulsi della stessa durata $t_b = T/N$; ogni sottoimpulso, o bit, viene quindi codificato con un certo valore di fase. L'involuppo complesso dell'impulso codificato è:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^N u_n \text{rect} \left[\frac{t - (n-1)t_b}{t_b} \right] \quad (3.1)$$

dove $u_n = e^{j\phi_n}$, e l'insieme delle N fasi $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ è il *codice di fase* associato ad $u(t)$. Parliamo di *codice binario* se il codice di fase contiene solo i valori 0 e π , altrimenti si parla di codice polifase.

Benchè la compressione d'impulso abbia risolto il problema della risoluzione in range, permettendo di ottenere segnali con lobi centrali molto stretti, essa ha costretto i progettisti ad accettare uno spiacevole compromesso: i segnali in uscita ai filtri, oltre ad esibire un lobo centrale molto stretto, esibiscono anche degli indesiderati lobi laterali.

La compressione di impulso, usata congiuntamente con un filtraggio MF in ricezione, garantisce il raggiungimento di un'elevata risoluzione in range, ed anche un'elevata capacità di rilevamento, nel caso di uno scenario privo di interferenza oppure nel caso si scelga un segnale con un'autocorrelazione con bassi lobi laterali. Il filtro adattato è ben noto per essere il filtro che ottimizza il rapporto segnale rumore (SNR) in uscita in presenza di rumore additivo bianco. Esso, quindi, ottimizza le

capacità di rilevamento in presenza del solo rumore termico², ma non è ottimo nel senso dell'*SCR* (signal-to-clutter ratio) ossia in presenza di clutter³.

Vediamo perchè in uno scenario con clutter i lobi laterali costituiscono un problema di non poco conto. Ipotizzando che i ritorni relativi alle singole entità riflettenti siano incorrelati, il segnale ricevuto dal radar può essere visto come la somma dei singoli echi provenienti dall'ambiente illuminato. Esso quindi può contenere sia l'eco di un bersaglio da rilevare, sia le riflessioni causate, per esempio, da terra, mare, pioggia, etc. L'uscita del ricevitore può essere, quindi, vista come la somma delle singole correlazioni tra i coefficienti del filtro ed i singoli echi provenienti dall'ambiente. Appare evidente, quindi, come i lobi laterali di una correlazione rappresentino un disturbo per le altre correlazioni adiacenti sull'asse dei ritardi o come una combinazione dei vari lobi possa innalzare il livello di taluni picchi laterali, al punto tale da scambiare questi ultimi per bersagli che, in realtà, non sono presenti. Un altro esempio che mostra perchè i lobi laterali siano indesiderati è dato dal possibile caso in cui vi siano due bersagli, entrambi da rilevare, i cui valori in range differiscano di poco, ma accade che uno risulti essere uno scatteratore "forte", mentre l'altro "debole". Le correlazioni associate agli echi di questi due bersagli risulteranno poco distanziate sull'asse dei ritardi ed allora può accadere che i lobi laterali relativi al bersaglio forte mascherino completamente il bersaglio debole causandone il mancato rilevamento. Da ciò deriva la necessità di trasmettere sequenze di codice con bassi lobi laterali e/o di proporre in ricezione una soluzione differente del filtro adattato, ottimizzata secondo un nuovo criterio.

Il progetto di sequenze di codice con "buone" proprietà di autocorrelazione è stato, per molti anni, un tema fondamentale della letteratura radar (si veda [16]). Tuttavia, pur utilizzando un codice con bassi lobi laterali, ciò potrebbe non essere sufficiente per determinate applicazioni. Da qui l'esigenza di abbandonare il classico filtro adattato e progettare un filtro MMF minimizzando determinate metriche energetiche [17] [18] [19]. Pur essendo sempre opportuno scegliere in maniera oculata anche

²E' possibile dimostrare che, sotto opportune ipotesi di progetto del ricevitore radar, la massimizzazione dell'*SNR* coincide con l'ottimizzazione della sua capacità di rilevamento.

³Il clutter può essere definito come un qualsiasi indesiderato eco radar che può creare confusione all'uscita del ricevitore rendendo più difficoltosa la rilevazione dei veri bersagli.

il codice da trasmettere, ciò non costituisce obiettivo di questo Capitolo. Per tale motivo i progetti dei filtri MMF verranno considerati e realizzati per un sequenza in trasmissione prefissata.

3.3 Modello analitico

Si consideri una tecnica di codifica di fase con N sottoimpulsi, e sia $\{s_n\}_{n=1}^N$ la sequenza modulante (ossia, $s_n = e^{j\varphi}$, $n = 1, \dots, N$). Il segnale che arriva al ricevitore del sistema radar viene prima demodulato e portato in banda base, per poi essere convertito da analogico a digitale. Sia $\{y_n\}_{n=1}^N$ una segmento (o finestra) della sequenza ricevuta (opportunamente filtrata, campionata e digitalizzata), temporalmente allineata con l'eco proveniente dal valore di range di interesse. Allora, possiamo scrivere $\{y_n\}$ come segue [21]:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} + \alpha_{-1} \begin{bmatrix} s_2 \\ \vdots \\ s_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$+ \dots + \alpha_{-N+1} \begin{bmatrix} s_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix}$$

dove $\{\epsilon_n\}$ denota i campioni del rumore filtrati dal ricevitore, $\{\alpha_k\}$ rappresentano quantità scalari a valori complessi proporzionali agli RCS⁴ (*Radar Cross Sections*) associati ai vari valori di range considerati dal sistema; infine, α_0 corrisponde alla RCS nel range bin di interesse corrente. Ovviamente, equazioni simili alla (3.2) possono essere riscritte per indicare allo stesso modo le finestre associate a valori di range differenti. E' bene notare che la (3.2) presuppone l'assenza di shift Doppler. Tale ipotesi, che non sussiste quando qualche bersaglio illuminato dal radar si muove rapidamente a velocità e direzione sconosciute, verrà rilassata in seguito.

⁴L'RCS rappresenta il coefficiente di back-scattering associato ad un oggetto che genera una riflessione del segnale radar.

Il modello (3.2) può essere riscritto come una somma convoluzionale:

$$y_n = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \alpha_k s_{n-k} + \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

in cui si assume $s_k = 0$ per $k \notin [1, N]$. Tale forma è talvolta usata al posto della (3.2), ma per i nostri scopi la forma (3.2) del modello di segnale ricevuto è più conveniente.

Uno dei problemi principali del DSP (*Digital Signal Processor*) di un radar, è rappresentato dalla stima dei parametri $\{\alpha_k\}$ a partire dalle osservazioni $\{y_n\}$, e dal successivo rilevamento ed analisi di quelli più significativi, tali da essere associati alla presenza di un bersaglio nella scena osservata. Dalla (3.2) si evince che non si tratta di un problema banale: in particolare, si nota come il numero dei parametri $\{\alpha_k\}_{k \neq 0}$ sconosciuti sia maggiore del numero di osservazioni $\{y_n\}$.

Nei sistemi a compressione d'impulso codificata uno dei metodi maggiormente utilizzati per la stima degli RCS è basata sul filtraggio adattato (MF), dove la RCS associata al range bin di interesse è stimata come

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\sum_{n=1}^N s_n^H y_n}{\sum_{n=1}^N |s_n|^2}. \quad (3.3)$$

La (3.3) rappresenta la stima ai minimi quadrati (LS) di α_0 , la quale, però, ha buone proprietà statistiche solo nelle ipotesi in cui il vettore che moltiplica α_0 nella (3.2) sia (quasi) ortogonale agli altri vettori nell'equazione stessa. Matematicamente, questa condizione può essere così espressa:

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^N s_n^H s_{n-k} \right|}{\sum_{n=1}^N |s_n|^2} \ll 1, \quad k = -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

in cui, si assume $s_k = 0$ per $k \notin [1, N]$. La (3.4) mostra analiticamente quanto affermato in precedenza: il numeratore fornisce, al variare di k , tutti i valori dei lobi laterali dell'autocorrelazione del codice trasmesso $\{s_n\}$; tali valori devono essere, in modulo, molto minori del picco del lobo centrale pari all'energia del codice trasmesso. Soltanto in tale circostanza il ricevitore MF avrà delle buone proprietà di stima.

Sequenze $\{s_n\}$ codificate sia in fase che in ampiezza offrono una maggiore flessibilità affinché sia soddisfatta la (3.4). Tuttavia esse non

sono comuni nei sistemi reali attuali a causa dell'elevato costo richiesto per fornire una modulazione d'ampiezza. Tipicamente nei moderni sistemi radar si utilizza una sequenza codificata in fase, molto spesso binaria, più semplice da generare in un trasmettitore. Nella trattazione esposta, i metodi, le discussioni, e i risultati ottenuti valgono per sequenze di codice $\{s_n\}$ arbitrarie.

Benchè esista una considerevole letteratura in merito al progetto di sequenze binarie con buone proprietà di autocorrelazione [22] [23] [24], non esiste alcuna sequenza binaria nota per la quale il rapporto nella (3.4) assume valori piccoli in maniera soddisfacente. Infatti, fra tali sequenze, il più piccolo valore di tale rapporto è fornito dal codice binario di Barker di lunghezza $N = 13$, ed è pari a circa -22.974dB ; tuttavia, esso non risulta sufficientemente basso da soddisfare molte applicazioni pratiche. Inoltre, la risoluzione in range fornita dal relativo codice non risulta accettabile dato il numero ridotto di impulsi utilizzabili in trasmissione.

Il filtraggio MMF rappresenta un approccio alla compressione d'impulso le cui prestazioni in termini di reiezione dell'interferenza (clutter) possono risultare migliori rispetto al caso MF anche di molti ordini di grandezza.

3.3.1 Modello di segnale

Si assuma che il sistema radar utilizzi la stessa sequenza di codice modulante $\{s_n\}$ considerata in precedenza, e si assuma che il vettore di osservazioni utilizzato per la stima degli RCS abbia lunghezza $2M + N$ invece di N , dove l'intero M costituisce un parametro di progetto. Sia $\{y_n\}_{n=1}^{2M+N}$ la finestra di osservazioni della sequenza ricevuta temporalmente allineata con l'eco relativo al valore di range di interesse. Allora, sotto l'usuale ipotesi che qualunque eco dovuto al precedente impulso trasmesso arrivi al ricevitore prima dei ritorni dovuti all'impulso corrente, possiamo scrivere il modello della suddetta finestra di osservazioni

nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2M+N} \end{bmatrix} &= \alpha_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ s_1 \\ \vdots \\ s_N \\ \mathbf{0}_M \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M+1} \\ s_1 \\ \vdots \\ s_N \\ \mathbf{0}_{M-1} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_{M+N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2M+N-1} \\ s_1 \end{bmatrix} + \\
 &+ \alpha_{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M-1} \\ s_1 \\ \vdots \\ s_N \\ \mathbf{0}_{M+1} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_{-M-N+1} \begin{bmatrix} s_N \\ \mathbf{0}_{2M+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{2M+N} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove $\mathbf{0}_M$ denota un vettore di zeri di dimensione $M \times 1$. Sia

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{n+1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{-n}^T, \tag{3.6}$$

$n = 1, \dots, M + N - 1$

una matrice di shift di dimensione $(2M + N) \times (2M + N)$, e sia

$$\mathbf{s} = [\mathbf{0}_M^T \quad s_1 \quad \dots \quad s_N \quad \mathbf{0}_M^T]^T. \tag{3.7}$$

Usando questa notazione possiamo scrivere la (3.5) in un modo più compatto:

$$\mathbf{y} = \alpha_0 \mathbf{s} + \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \alpha_k \mathbf{J}_k \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{3.8}$$

in cui i vettori \mathbf{y} ed $\boldsymbol{\epsilon}$ sono definiti come

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{2M+N}]^T, \quad \boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \cdots \quad \epsilon_{2M+N}]^T.$$

Assumiamo, infine, che la sequenza di rumore sia “bianca”, e tale che:

$$E\{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^*\} = \sigma^2 \mathbf{I}. \tag{3.9}$$

Va sottolineato che nella (3.7) il numero di zeri posti prima e dopo la sequenza $\{s_n\}$ potrebbe essere arbitrario (purchè la somma risulti essere pari a $2M$). Tuttavia, in tal caso, avremmo due parametri di progetto al posto di uno (cioè M) e ciò non farebbe altro che complicare le notazioni e la procedura di progetto senza offrire garanzia di prestazioni considerevolmente migliori.

Vi è un immediato vantaggio intuitivo nell'utilizzare il modello esteso (3.5) rispetto al modello (3.2). In quest'ultimo caso il rapporto tra il numero di parametri sconosciuti ed il numero di osservazioni è dato da:

$$\frac{2N - 1}{N},$$

che è approssimativamente uguale a due per valori di N ragionevolmente grandi. Dall'altro lato, lo stesso rapporto per la (3.5) è uguale a:

$$\frac{2M + 2N - 1}{2M + N},$$

che è circa pari ad uno per $M \gg N$. Allo scopo di avere $M \gg N$, si dovrebbe, in teoria, mantenere N relativamente piccolo. Mentre da un lato ciò risulta vantaggioso perchè permette di risolvere più semplicemente il problema del progetto della sequenza $\{s_n\}_{n=1}^N$ (la complessità computazionale di tale problema cresce esponenzialmente con N), dall'altro lato sequenze di codice brevi posso essere identificate più facilmente e quindi il loro utilizzo può aumentare la probabilità di intercettazione, a meno che non si eviti di utilizzare sequenze standard (per esempio i codici di Barker), cosa che è vivamente raccomandata qualora la probabilità di intercettazione risulti un parametro importante.

Come già affermato in precedenza, se nella (3.5) non vi fossero i termini di interferenza, allora la stima MF di α_0 avrebbe eccellenti proprietà statistiche. Tuttavia la condizione di assenza di interferenza non è quasi mai soddisfatta per un sistema di rilevamento attivo. Di conseguenza, per ovviare alla necessità di questa condizione, si considera un metodo più generale per la stima di α_0 , ossia il filtraggio disadattato. La stima MMF di α_0 è data da [25] [26] [27]:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{y}}{\mathbf{x}^H \mathbf{s}}, \quad (3.10)$$

dove \mathbf{x} rappresenta il vettore dei coefficienti del filtro di dimensione $(2M + N) \times 1$ (chiaramente, per $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ la (3.10) si riduce alla stima MF di α_0).

E' evidente che la (3.10) è molto più complessa computazionalmente rispetto alla stima MF di α_0 , infatti mentre quest'ultima non richiede moltiplicazioni nel caso si usi un codice $\{s_n\}$ binario, la stima MMF richiede sempre $(2M+N)$ moltiplicazioni. La maggior parte dei moderni processori radar sono comunque abbastanza potenti per gestire un tale modello con semplicità; inoltre, la maggiore complessità computazionale è completamente compensata dal grande vantaggio della (3.10) in termini di prestazioni del sistema. Infatti, per la stima MMF di α_0 affinché sia soddisfatta una condizione analoga alla (3.4), occorre che \mathbf{x} sia (quasi) ortogonale ai vettori che moltiplicano gli $\{\alpha_k\}_{k \neq 0}$ nella (3.5). Poiché i coefficienti del filtro \mathbf{x} non sono vincolati in nessun modo, nè ad essere binari nè ad essere reali, soddisfare tale condizione risulta, in genere, un obiettivo più semplice da raggiungere. Per di più, il numero di gradi di libertà da poter utilizzare per raggiungere tale scopo aumenta all'aumentare di M , a riprova del fatto che il modello (3.5) è da preferire rispetto al (3.2).

L'obiettivo della seguente trattazione è quello di trovare il vettore \mathbf{x} , per un codice \mathbf{s} ed un valore M prefissati, che permetta una stima accurata di α_0 nel caso di uno scenario radar con clutter.

3.3.2 Metriche considerate

Per il progetto dei filtri disadattati verranno considerate solo le seguenti metriche indipendenti dai parametri che il sistema radar vuole stimare:

- Integrated Sidelobe Level (*ISL*)

$$ISL = \frac{\sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} |\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2} \quad (3.11)$$

- Peak Sidelobe Level (*PSL*)

$$PSL = \max_k \frac{|\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2}, \quad (3.12)$$

per $k = -M - N + 1, \dots, -1, 1, \dots, M + N - 1$

- Inverse Signal-to-Noise Ratio (*ISNR*)

$$ISNR = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2} \quad (3.13)$$

Allo scopo di rendere la trattazione valida in generale, tali metriche sono state formulate per variabili a valore complesso. Lo scopo dei progetti è quello di selezionare un vettore \mathbf{x} che minimizzi tali metriche, o, almeno, li renda pari a valori specifici. In tal modo viene garantito che $\hat{\alpha}_0$ nella (3.10) sia una stima accurata di α_0 . Per dimostrarlo analiticamente, sostituiamo la (3.8) nella (3.10) ottenendo:

$$\hat{\alpha}_0 - \alpha_0 = \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \alpha_k \left[\frac{\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}}{\mathbf{x}^H \mathbf{s}} \right] + \frac{\mathbf{x}^H \boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{x}^H \mathbf{s}} \quad (3.14)$$

Sotto l'ipotesi di rumore bianco, la varianza del termine dipendente dal rumore nella (3.14) risulta pari a $\sigma^2 ISNR$, dove σ^2 è la varianza del rumore; la dipendenza dell'errore di stima (3.14) dal *PSL* e dall'*ISL* risulta invece più evidente. Da queste osservazioni consegue che minimizzare le sopracitate metriche costituisce un modo naturale per minimizzare l'errore di stima in $\hat{\alpha}_0$ quando i valori di $\{\alpha_k\}_{k \neq 0}$ e σ^2 non sono noti. Il vantaggio di usare tali metriche sta nel fatto che il progetto del filtro in ricezione può essere eseguito off-line senza dover venire incontro a vincoli sui tempi computazionali del progetto. Viceversa, considerare una metrica dipendente dai dati significa dover ottenere prima delle stime $\{\hat{\alpha}_k\}_{k \neq 0}$ e $\hat{\sigma}^2$, quindi effettuare il calcolo del progetto on-line dovendo rispettare predeterminati vincoli di tempo. Tale caso non verà, quindi, analizzato in quanto si vuole ottenere una implementazione a bassa complessità.

3.3.3 Progetto a minimo *PSL*

Quando il sistema radar è pensato per uno scenario caratterizzato da un clutter "non denso", che si manifesta, nella (3.5), nella presenza di pochi termini interferenti significativi associati a dei forti scatteratori, ha senso progettare il filtro disadattato in ricezione attraverso la minimizzazione del *PSL*.

Il problema di ottimizzazione è il seguente:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \max_{k \neq 0} \frac{|\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2} \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^H \mathbf{s} = N, \end{cases} \quad (3.15)$$

Si noti il vincolo energetico sul vettore \mathbf{x} ; esso deve essere selezionato in modo tale che l'energia mutua col codice \mathbf{s} sia la stessa che si otterrebbe

nel caso MF [21] [28] (cioè per $\mathbf{x} = \mathbf{s}$). A tal fine il vettore \mathbf{x} può essere ridefinito nel seguente modo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{z} \quad (3.16)$$

dove la matrice \mathbf{U} , di dimensioni $(2M + N) \times (2M + N - 1)$, costituisce una base unitaria del Kernel di \mathbf{s}^H , ossia è tale che $\mathbf{U}^H \mathbf{s} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Usando questa scomposizione nella (3.12) otteniamo la seguente funzione di costo:

$$\max_{k \neq 0, k = -M-N+1, \dots, M+N-1} \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \mathbf{U}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{\|\mathbf{s}\|^4}. \quad (3.17)$$

Reimpostando il problema in forma epigrafica, il filtro a minimo *PSL* è dato dalla soluzione del seguente problema equivalente:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}, t} & t \\ \text{subject to} & |\mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H \mathbf{s} + \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H \mathbf{U} \mathbf{z}|^2 \leq t \|\mathbf{s}\|^4, \\ & \text{per } k = -M - N + 1, \dots, -1, 1, \dots, M + N - 1, \end{cases} \quad (3.18)$$

in cui t è la variabile ausiliaria.

Nel caso in cui il filtro progettato sia a valori reali il problema (3.18) è un semplice problema LP [26] [29]. Diversamente, nel caso a valori complessi, tale problema è un più generico *SOCP* [21] (Second-Order Cone Program) che può essere efficientemente risolto in tempi polinomiali con la dimensione del problema tramite l'utilizzo di software di dominio pubblico (per esempio si veda [13] e [14]).

Essendo stato il problema impostato in termini convessi, esso non potrà che presentare almeno un punto di ottimo, verso il quale sarà possibile convergere in maniera efficiente ricorrendo ad algoritmi basati sul metodo del punto interiore. Da questo punto di vista, la procedura qui presentata risulta migliore di quella elaborata in [28], in cui veniva presentato un algoritmo iterativo la le cui effettive proprietà di convergenza risultano sconosciute.

Al fine di facilitare l'impostazione del problema mediante i comuni software considerati per la risoluzione del problema di ottimizzazione, la (3.18) può essere reimpostata in un'ulteriore forma equivalente. Si noti che:

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2 = (\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s})(\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s})^H = \mathbf{x}^H (\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H) \mathbf{x}, \quad (3.19)$$

e che

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2 = (\mathbf{x}^H \mathbf{s})(\mathbf{x}^H \mathbf{s})^H = \mathbf{x}^H (\mathbf{s} \mathbf{s}^H) \mathbf{x} \quad (3.20)$$

Inserendo la scomposizione $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z}$ nella (3.19) e nella (3.20) si ottiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})^H [\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H] (\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z}) &= \\ &= \mathbf{s}^H [\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H] \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \{ \mathbf{U}^H [\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H] \mathbf{U} \} \mathbf{z} + \\ &+ \mathbf{s}^H [\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H] \mathbf{U} \mathbf{z} + (\mathbf{U} \mathbf{z})^H [\mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H] \mathbf{s} = \\ &= \mathbf{s}^H \mathbf{B}_k \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \mathbf{C}_k \mathbf{z} + \mathbf{s}^H \mathbf{B}_k (\mathbf{U} \mathbf{z}) + (\mathbf{U} \mathbf{z})^H \mathbf{B}_k \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e

$$(\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H (\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z}) = \mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}, \quad (3.22)$$

dove $\mathbf{B}_k = \mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H$ e $\mathbf{C}_k = \mathbf{U}^H \mathbf{B}_k \mathbf{U}$.

In conclusione il problema (3.18) può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}, t} & t \\ \text{subject to} & \mathbf{s}^H \mathbf{B}_k \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \mathbf{C}_k \mathbf{z} + \mathbf{s}^H \mathbf{B}_k (\mathbf{U} \mathbf{z}) + \\ & + (\mathbf{U} \mathbf{z})^H \mathbf{B}_k \mathbf{s} - t(\mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

per $k = -M - N + 1, \dots, -1, 1, \dots, M + N - 1$.

Come verrà mostrato nel seguito, fissato il codice \mathbf{s} , è possibile migliorare il valore del PSL aumentando il valore di M e quindi progettando un filtro più lungo.

3.3.4 Progetto a minimo ISL

In determinati casi di interesse pratico, un progetto a minimo ISL può fornire migliori prestazioni [18] [30] [31] [32] [33] di stima rispetto ad un progetto a minimo PSL essendo variato il “profilo energetico” di interesse. Ciò è vero, ad esempio, nel caso di un clutter “denso”, ossia nel caso di uno scenario con clutter uniformemente distribuito, ma può risultare vero anche per uno scenario con pochi scatteratori forti. Infatti, come mostra l’esperienza, il profilo dei lobi laterali di un filtro a minimo PSL è piuttosto piatto; mentre il PSL di tale filtro risulta minore del PSL del corrispondente filtro a minimo ISL , è anche vero che i lobi laterali del filtro a minimo PSL sottenderanno un’area maggiore rispetto ai corrispondenti lobi laterali del filtro a minimo ISL . Di conseguenza,

il progetto a minimo PSL porterà a migliori prestazioni di stima solo nel *worst case*, cioè nel caso in cui i ritorni relativi ai forti scatteratori risultino temporalmente allineati con i picchi dei lobi laterali associati ad un bersaglio da rilevare. In tutti gli altri casi il progetto a minimo ISL ha maggiori possibilità di offrire migliori prestazioni in termini di stima e di rilevamento.

Il problema di ottimizzazione considerato in questa sezione consiste nella minimizzazione dell' ISL rispetto ad \mathbf{x} , dato un codice \mathbf{s} ed un valore di M prefissati:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{\sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} |\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2}. \quad (3.24)$$

Sia

$$\mathbf{R} = \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H; \quad (3.25)$$

è possibile, allora, riscrivere la (3.24) nella seguente forma equivalente e più compatta:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x}}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2}. \quad (3.26)$$

Si può dimostrare che la matrice \mathbf{R} è *strettamente definita positiva*. Sia $\mathbf{R}^{1/2}$ ($\mathbf{R}^{-1/2}$) la radice quadrata Hermitiana di \mathbf{R} (di \mathbf{R}^{-1}). Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ottiene:

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2 = |\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s}|^2 \leq (\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x})(\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}). \quad (3.27)$$

La disuguaglianza implica che:

$$ISL = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x}}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2} \geq \frac{1}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}, \quad (3.28)$$

dove il limite inferiore è ottenuto per:

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}. \quad (3.29)$$

Al filtro ottimo (3.29) corrisponde il minimo valore di ISL ottenibile, pari a:

$$ISL^\circ = \frac{1}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}. \quad (3.30)$$

Anche il progetto a minimo ISL gode di una importante proprietà che verrà riscontrata nei risultati numerici: il valore di ISL° decresce monotonicamente all'aumentare di M .

Va altresì notato che in tale progetto, a differenza del precedente, non è imposto alcun vincolo sull'energia mutua tra il filtro \mathbf{x} ed il codice \mathbf{s} .

3.3.5 Progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL

Benchè il progetto possa essere formulato come la minimizzazione dell' ISL con un vincolo sull' $ISNR$, il problema che viene qui considerato è quello della minimizzazione dell' $ISNR$ con un vincolo sull' ISL . Nelle applicazioni pratiche, infatti, il desiderato ISL risulta essere specificato più facilmente del desiderato $ISNR$. Va sottolineato che, benchè il progetto sia stato testato per sequenze \mathbf{s} e valori di M prefissati, tale tipo di problema non può prescindere da una accurata preselezione di tutti i parametri del sistema al fine di ottenere un filtro dalle prestazioni desiderate.

Il primo passo del progetto è quello di specificare il valore di N , nonché il desiderato ISL che denotiamo con η . Come è noto, il filtro MF ha il più piccolo valore di $ISNR$ nella classe dei filtri MMF ($ISNR_{MF} = 1/\|\mathbf{s}\|^2$), pari a $1/N$ per sequenze binarie. Il valore di N può essere scelto, quindi, in modo tale che $ISNR_{MF}$ assuma un valore ragionevolmente piccolo, dato che l' $ISNR$ relativo al filtro MMF che verrà in seguito progettato sarà solo di poco peggiore di quello associato al relativo filtro MF.

Fissato il valore di N , cioè la lunghezza del codice da trasmettere, si può pensare di scegliere opportunamente una sequenza \mathbf{s} a seconda delle caratteristiche di autocorrelazione desiderate. A questo punto il valore di M può essere scelto calcolando l' ISL° per valori crescenti di M fino al raggiungimento di un valore $ISL^\circ < \eta$. Infatti l' ISL° , che otteniamo dal progetto a minimo ISL (per fissati N , \mathbf{s} , ed M), rappresenta il minimo valore di η che può essere considerato; al di sotto di tale limite inferiore il problema che andremo a considerare diverrebbe inammissibile. D'altro canto, il valore di ISL_{MF} fornito dal filtro adattato, cui è associato il minimo valore ottenibile di $ISNR$, è spesso considerato troppo grande in molte situazioni pratiche. Da questo ragionamento consegue che, per fissati N , \mathbf{s} , ed M , il valore di η va scelto tale che esso sia compreso nell'intervallo $[ISL^\circ, ISL_{MF}]$.

A questo punto, il problema di ottimizzazione che vogliamo considerare è:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & ISNR \\ \text{subject to} & ISL \leq \eta. \end{cases} \quad (3.31)$$

Poichè uno scaling di \mathbf{x} non modifica l' ISL o l' $ISNR$, non vi è alcun impedimento nell'imporre che $\mathbf{x}^H \mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2$, ossia nell'imporre su $\mathbf{x}^H \mathbf{s}$ le stesse condizioni energetiche del filtro MF. Il progetto (3.31) può essere, quindi, riformulato nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \|\mathbf{x}\|^2 \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^H \mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2 \\ & \mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} \leq \eta \|\mathbf{s}\|^4. \end{cases} \quad (3.32)$$

Questo è un problema di ottimizzazione convessa che può essere risolto in modo efficiente usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [34]. Al tal fine riscriviamo prima il problema nel seguente modo equivalente:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} & \mathbf{w}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w} \\ \text{subject to} & \mathbf{w}^H \left(\frac{\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^2} \right) = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|^2 \leq \eta \|\mathbf{s}\|^4, \end{cases} \quad (3.33)$$

dove si è definito $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{x}$. Allora risulta:

$$\mathbf{w}^\circ(\lambda) = \frac{\mathbf{R}^{1/2} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|^2 \triangleq \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{x}^\circ(\lambda), \quad (3.34)$$

dove λ è un moltiplicatore di Lagrange e quindi vincolato ad essere strettamente positivo. Il filtro ottimo che vogliamo ottenere è dato quindi da:

$$\mathbf{x}^\circ(\lambda) = \frac{(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|^2. \quad (3.35)$$

Per un valore di η opportunamente scelto, la soluzione del problema (3.32) è data da $\mathbf{x}^\circ(\lambda^\circ)$, dove λ° è ottenuta risolvendo l'equazione $\|\mathbf{w}^\circ(\lambda)\|^2 = \eta \|\mathbf{s}\|^4$, o in una forma più esplicita:

$$\frac{\mathbf{s}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}}{[\mathbf{s}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}]^2} = \eta. \quad (3.36)$$

Si può dimostrare che tale equazione ha un'unica soluzione per $\lambda > 0$, mentre può averne molte per $\lambda < 0$. Tuttavia, in virtù del vincolo di non

negatività del moltiplicatore lagrangiano l'ultima condizione non viene mai a verificarsi. Inoltre, si può anche dimostrare che il membro sinistro dell'equazione (3.36) è una funzione monotonicamente decrescente per valori di $\lambda > 0$. Da queste osservazioni consegue che la soluzione della (3.36) può essere calcolata in modo efficiente attraverso un semplice algoritmo di bisezione.

3.3.6 Filtri Ottimi nel caso di Shift Doppler

Quando alcuni bersagli illuminati dal radar si spostano con velocità e direzione sconosciute, allora gli shift Doppler devono essere presi in considerazione nel modello di segnale considerato e nella conseguente analisi. In particolare, siano $\{\omega_k\}_{k=-M-N+1}^{M+N-1}$ gli shift Doppler associati ai vari valori di range in considerazione e sia

$$\mathbf{s}(\omega) = [\mathbf{0}_M^T \ s_1 e^{j\omega} \ \dots \ s_N e^{jN\omega} \ \mathbf{0}_M^T]^T \quad (3.37)$$

una generica sequenza di codice zero-padded affetta da shift Doppler (va notato che $\mathbf{s}(\omega)$ è a valori complessi anche quando \mathbf{s} è a valori reali). Allora il modello di segnale (3.8) dovrebbe essere modificato come segue qualora gli shift Doppler non siano trascurabili [21]:

$$\mathbf{y} = \alpha_0 \mathbf{s}(\omega_0) + \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \alpha_k \mathbf{J}_k \mathbf{s}(\omega_k) + \boldsymbol{\epsilon}. \quad (3.38)$$

L' ISL e l' $ISNR$ associati alla (3.38) sono dati dalle seguenti equazioni:

$$ISL_D = \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \frac{|\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{J}_k \mathbf{s}(\omega_k)|^2}{|\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{s}(\omega_0)|^2}. \quad (3.39)$$

e, rispettivamente,

$$ISNR_D = \frac{\|\mathbf{x}(\omega_0)\|^2}{|\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{s}(\omega_0)|^2}, \quad (3.40)$$

in cui adesso è evidente la dipendenza del filtro disadattato \mathbf{x} da ω_0 e ω_k .

Sia

$$\Omega = [\omega_a, \omega_b]; \quad \omega_b > \omega_a \quad (3.41)$$

un dato intervallo di possibili valori di ω_0 ed $\{\omega_k\}$. Si può dimostrare che l'effetto degli shift Doppler non è trascurabile solo se l'intervallo Ω è sufficientemente grande [19]. In particolare, se la differenza $(\omega_b - \omega_a)$ non è di troppo più piccola di $2\pi/N$. Supponiamo, quindi, che $(\omega_b - \omega_a) \geq \Delta\omega$ dove $\Delta\omega$ è dell'ordine di $\pi/(10N)$, allora gli shift Doppler non sono trascurabili.

Supponiamo che la seguente griglia

$$\{0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega, \dots\} \quad (3.42)$$

copra l'intervallo Ω ; e sia L il numero di punti nella (3.42). Nella discussione che segue supporremo che ω_0 assuma valori nell'insieme (3.42).

Poichè non abbiamo nessuna conoscenza a priori degli shift Doppler $\{\omega_k\}$ oltre al fatto che i loro valori appartengono ad Ω , l' ISL non può essere calcolato così come presentato nella (3.39). Il modo più semplice per ovviare a tale problema è quello di sostituire tale metrica con la seguente versione mediata sull'intervallo Ω :

$$ISL_D = \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a} \right) \frac{\int_{\Omega} |\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{J}_k \mathbf{s}(\omega)|^2 d\omega}{|\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{s}(\omega_0)|^2}. \quad (3.43)$$

Sia

$$\Gamma = \frac{1}{\omega_b - \omega_a} \int_{\Omega} \mathbf{s}(\omega) \mathbf{s}^H(\omega) d\omega. \quad (3.44)$$

Segue che l' ISL_D può essere riscritto nel modo seguente:

$$ISL_D = \frac{\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{R}_D \mathbf{x}(\omega_0)}{|\mathbf{x}^H(\omega_0) \mathbf{s}(\omega_0)|^2}, \quad (3.45)$$

dove

$$\mathbf{R}_D = \sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} \mathbf{J}_k \Gamma \mathbf{J}_k^H. \quad (3.46)$$

Per un fissato valore di ω_0 , l' ISL e l' $ISNR$ hanno la stessa forma delle corrispondenti metriche considerate nel caso in cui gli shift Doppler siano trascurabili, con la sola differenza che la matrice \mathbf{R} nella (3.26) è sostituita dalla matrice \mathbf{R}_D nella (3.45). Di conseguenza, entrambi i progetti a minimo ISL_D ed a minimo $ISNR_D$ con vincolo sull' ISL_D

possono essere efficientemente ottenuti utilizzando i metodi descritti nei paragrafi precedenti.

Poichè ω_0 non è noto a priori, bisogna progettare il filtro desiderato per tutti gli L valori di ω_0 nell'insieme (3.42). I filtri $\mathbf{x}(\omega_0)$, per $\omega_0 = 0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega, \dots$, così ottenuti, e che possono essere precalcolati, saranno utilizzati al ricevitore per la stima sia di α_0 che di ω_0 .

Per la stima di α_0 si considera fondamentalmente la stessa formula considerata in precedenza (vedi la (3.10)):

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\mathbf{x}^H(\hat{\omega}_0)\mathbf{y}}{\mathbf{x}^H(\hat{\omega}_0)\mathbf{s}(\hat{\omega}_0)} = \frac{\mathbf{s}^H(\hat{\omega}_0)\tilde{\mathbf{R}}_D^{-1}\mathbf{y}}{\mathbf{s}^H(\hat{\omega}_0)\tilde{\mathbf{R}}_D^{-1}\mathbf{s}(\hat{\omega}_0)} \quad (3.47)$$

dove $\tilde{\mathbf{R}}_D = \mathbf{R}_D$ per il progetto di filtro disadattato a minimo ISL_D , mentre $\tilde{\mathbf{R}}_D = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{R}_D$ per il progetto di filtro disadattato a minimo $ISNR_D$ con vincolo sull' ISL_D . Va notato che nella formula abbiamo usato $\hat{\omega}_0$ al posto di ω_0 , ad indicare che la stima di α_0 va effettuata previa stima dello shift Doppler ed utilizzo del corrispondente filtro.

La stima $\hat{\omega}_0$ di ω_0 nella (3.47) è ottenuta dalla soluzione del seguente problema di massimizzazione:

$$\max_{\omega_0 \in \{0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega, \dots\}} \frac{|\mathbf{s}^H(\omega_0)\tilde{\mathbf{R}}_D^{-1}\mathbf{y}|^2}{\mathbf{s}^H(\omega_0)\tilde{\mathbf{R}}_D^{-1}\mathbf{s}(\omega_0)}. \quad (3.48)$$

3.4 Progetto del Filtro Ottimo secondo Pareto

Applicando la teoria dell'ottimizzazione vettoriale è possibile progettare un filtro attraverso l'ottimizzazione congiunta di più metriche. Pur essendo possibile un'ottimizzazione congiunta di tutte le metriche considerate (PSL , ISL , e $ISNR$), quello che qui viene considerato è un problema di ottimizzazione bi-criterio [20] in cui le funzioni obiettivo da minimizzare sono il PSL e l' ISL [20]. Si consideri, quindi, la seguente funzione vettoriale multiobiettivo, le cui componenti scalari rappresentano le metriche considerate:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) &= [PSL, ISL]^T = \\ &= \left[\max_{k \neq 0} \frac{|\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2}, \frac{\sum_{k=-M-N+1, k \neq 0}^{M+N-1} |\mathbf{x}^H \mathbf{J}_k \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{x}^H \mathbf{s}|^2} \right]^T. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Allo scopo di impostare il problema in una forma equivalente più compatta, consideriamo le scomposizioni (3.19) e (3.20) nonché l'espressione (3.25) della matrice \mathbf{R} . Inoltre, sia:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{J}_k \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{J}_k^H; \quad (3.50)$$

la nostra funzione multiobiettivo può, quindi, essere espressa nel modo seguente:

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \left[\max_{k \neq 0, k=-M-N+1, \dots, M+N-1} \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{B}_k \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H (\mathbf{s} \mathbf{s}^H) \mathbf{x}}, \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H (\mathbf{s} \mathbf{s}^H) \mathbf{x}} \right]^T. \quad (3.51)$$

Poichè le metriche considerate sono invarianti per uno scaling di \mathbf{x} , riconsideriamo la stessa scomposizione (3.16) utilizzata nel progetto a minimo *PSL*, ovvero $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z}$, dove \mathbf{U} è una base unitaria del Kernel di \mathbf{s}^H , e sostituiamo tale espressione nella (3.51) ottenendo il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{z}} \left[\max_{k \neq 0} \frac{(\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})^H \mathbf{B}_k (\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})}{\mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}}, \frac{(\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})^H \mathbf{R} (\mathbf{s} + \mathbf{U} \mathbf{z})}{\mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}} \right]^T. \quad (3.52)$$

Il problema (3.52) rappresenta un problema di ottimizzazione vettoriale in forma convessa [1] [35]; per tale classi di problemi è possibile ottenere un qualsiasi ottimo di Pareto attraverso la scalarizzazione del problema. A tal proposito, sia $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]^T$ il vettore dei pesi di Pareto; il problema scalarizzato è il seguente:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{\lambda} \succ \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.53)$$

ossia:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & [\lambda_1 PSL + \lambda_2 ISL] \\ \text{subject to} & \boldsymbol{\lambda} \succ \mathbf{0} \end{cases}. \quad (3.54)$$

Il rapporto λ_i/λ_j tra i pesi della *i*-esima funzione obiettivo F_i e la *j*-esima funzione obiettivo F_j può essere interpretato come il *peso relativo* della *i*-esima funzione obiettivo rispetto alla *j*-esima. Un decremento di F_j di un fattore α è equivalente ad un incremento in F_i di una quantità pari a $(\lambda_i/\lambda_j)\alpha$. Per tale motivo il peso del *PSL*, nel nostro problema bi-criterio, può essere messo prima in evidenza:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \lambda_1 [PSL + \gamma ISL] \\ \text{con} & \gamma = \lambda_2/\lambda_1 \end{cases} \quad (3.55)$$

e poi trascurato. Poichè nell'espressione dell'*ISL* non è presente la dipendenza da k possiamo riscrivere il problema scalarizzato (3.55) nel modo seguente:

$$\min_{\mathbf{z}} \max_{k \neq 0} \left\{ \frac{(\mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{z})^H \mathbf{B}_k (\mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{z}) + \gamma [(\mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{z})^H \mathbf{R} (\mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{z})]}{\mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}} \right\}. \quad (3.56)$$

Per rendere la notazione ancora più compatta, si sviluppa il numeratore e si raccolgono i vari termini:

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}^H (\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}) \mathbf{s} + \mathbf{z}^H [\mathbf{U}^H (\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}) \mathbf{U}] \mathbf{z} + \mathbf{s}^H (\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}) (\mathbf{U}\mathbf{z}) \\ & + (\mathbf{U}\mathbf{z})^H (\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}) \mathbf{s} = \\ & \mathbf{s}^H \mathbf{D}_k \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \mathbf{E}_k \mathbf{z} + \mathbf{s}^H \mathbf{D}_k (\mathbf{U}\mathbf{z}) + (\mathbf{U}\mathbf{z})^H \mathbf{D}_k \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

dove

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{U}^H (\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R}) \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{D}_k \mathbf{U}. \quad (3.59)$$

Si può notare facilmente come l'espressione della funzione obiettivo che vogliamo minimizzare sia simile a quella del progetto a minimo *PSL*, salvo aver sostituito \mathbf{B}_k con $(\mathbf{B}_k + \gamma \mathbf{R})$. Analogamente, quindi, il problema viene reimpostato nella forma epigrafica equivalente, assumendo la sua forma finale:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}, t} & t \\ \text{subject to} & \mathbf{s}^H \mathbf{D}_k \mathbf{s} + \mathbf{z}^H \mathbf{E}_k \mathbf{z} + \mathbf{s}^H \mathbf{D}_k (\mathbf{U}\mathbf{z}) + \\ & + (\mathbf{U}\mathbf{z})^H \mathbf{B}_k \mathbf{s} - t(\mathbf{s}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{s}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

per $k = -M - N + 1, \dots, -1, 1, \dots, M + N - 1$, in cui le matrici \mathbf{D}_k e \mathbf{E}_k sono funzioni del peso γ . Anche in tal caso è facile constatare come, nel caso a valori reali, il progetto per un fissato valore di γ si riduce ad un problema LP; diversamente, nel caso a valori complessi, si affronta un problema di ottimizzazione convessa di tipo *SOCP*.

3.5 Analisi delle prestazioni

Nei paragrafi successivi saranno illustrati i risultati numerici ottenuti dalla simulazione dei vari progetti di filtri MMF considerati. In particolare verranno considerati due diversi codici assunti come sequenze di

trasmissione, e per ciascuno di essi verranno mostrati i risultati dei progetti a minimo ISL , a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL , a minimo PSL , ed infine del progetto di filtro ottimo secondo Pareto. Di seguito si indicherà con P la lunghezza del filtro da progettare, pari a $2M + N$, dove N è la lunghezza del codice \mathbf{s} ed M è il parametro di progetto considerato nel modello esteso di segnale ricevuto (3.5).

3.5.1 Codice di Barker a lunghezza 13

In questo paragrafo consideriamo come sequenza di trasmissione \mathbf{s} il codice binario di Barker a lunghezza 13 [36]. Tra i codici di Barker conosciuti, quello di lunghezza 13 è il codice di lunghezza massima; esso ha la proprietà di possedere, nella propria autocorrelazione, lobi laterali unitari ed inferiori di un fattore $1/13$, rispetto al picco del lobo centrale, nonché il più piccolo valore di PSL fra tutte le sequenze binarie note. Per queste caratteristiche esso è largamente utilizzato non solo per la compressione d'impulso ma anche nei sistemi che utilizzano la tecnica di trasmissione DSSS (Direct Sequence Spread Spectrum).

Progetto a minimo ISL per lunghezza del filtro $P = 13$ e $P = 33$

In questa sezione vengono presentati i risultati del progetto a minimo ISL . Prima di tutto viene presentato il progetto del filtro MMF della stessa lunghezza del codice trasmesso, quindi per $P = 13$, al fine di riscontrare il miglioramento delle prestazioni, in termini di energia sottesa alla funzione di correlazione in uscita, rispetto al comune filtro adattato. Successivamente viene presentato il progetto per $P = 33$, al fine di riscontrare il miglioramento delle prestazioni all'aumentare della lunghezza del filtro. Si ricorda, infatti, che è possibile dimostrare che l' ISL° è inversamente proporzionale ad M , e quindi a P per N fissato.

In figura (3.2) si mettono a confronto i moduli delle cross-correlazioni del codice con il filtro adattato e con il filtro disadattato ottenuto dal progetto a minimo ISL per $P = 13$. La Tabella 3.5.1 mostra le differenze di prestazione.

Coerentemente con il progetto di partenza, notiamo un miglioramento dell' ISL di circa 4.2dB, corrispondente ad un guadagno sull' ISL del 62% rispetto al caso MF. Il progetto ha anche portato ad un miglioramento del PSL , mentre l' $ISNR$ resta pressochè invariato, con un peggioramento dell'1,6% rispetto al caso MF.

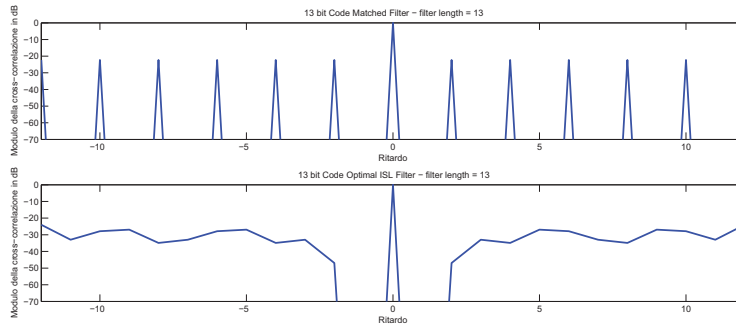


Figura 3.2: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo ISL di lunghezza 13.

	MF	MMF
$ISL(\text{dB})$	-11.4871	-15.6820
$PSL(\text{dB})$	-22.2789	-24.0045
$ISNR(\text{dB})$	-11.1394	-10.9964

Tabella 3.1: Differenze di prestazione tra filtro MF e filtro MMF a minimo ISL per $P = 13$ nel caso di codice di Barker 13.

La figura (3.3) mostra, invece, il modulo della cross-correlazione relativa allo stesso progetto precedente ma per $P = 33$. In tal caso risulta ancora più evidente la diminuzione dell'area sottesa dai lobi laterali in uscita al filtro disadattato rispetto al caso MF.

In Tabella 3.5.1 sono confrontate le prestazioni del primo progetto ($P = 13$) con il secondo ($P = 33$). Così come previsto l' ISL nel secondo caso presenta un miglioramento ancora più rilevante, diminuendo di altri 12dB rispetto al primo caso. Progettare un filtro più lungo del codice di trasmissione ha portato anche ad un notevole miglioramento del PSL , mentre l' $ISNR$ ha subito un peggioramento ancora una volta poco rilevante. A seconda delle proprie esigenze è, quindi, possibile aumentare il valore di M nel progetto del filtro fino al raggiungimento del desiderato valore di ISL ; il compromesso sta nel maggiore costo computazionale, e quindi economico, del ricevitore.

La figura (3.4) mostra i diversi valori di ISL° in dB che si ottengono dal progetto a minimo ISL al variare del parametro di progetto M . La curva ottenuta, monotonicamente decrescente, evidenzia l'incre-

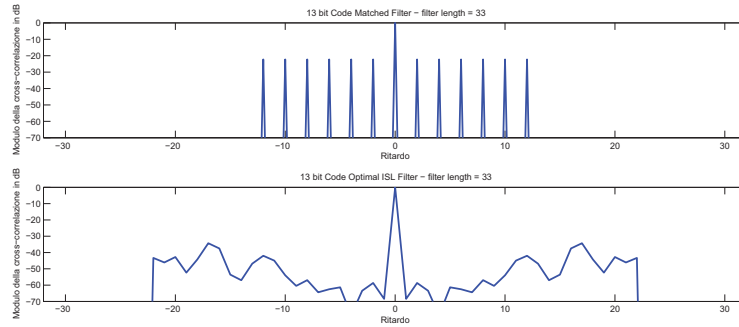


Figura 3.3: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo ISL di lunghezza 33.

	$P = 13$	$P = 33$
$ISL(\text{dB})$	-15.6820	-27.6744
$PSL(\text{dB})$	-24.0045	-34.2736
$ISNR(\text{dB})$	-10.9964	-10.9373

Tabella 3.2: Differenze di prestazione tra filtri MMF a minimo ISL per $P = 13$ e $P = 33$ nel caso di codice di Barker 13.

mento delle prestazioni del filtro all'aumentare della sua lunghezza per N fissato.

Progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL per lunghezza del filtro $P = 13$ e $P = 33$

In questa sezione mostriamo i risultati del progetto a minimo $ISNR$ col vincolo $ISL \leq \eta$. Poichè il problema è ammissibile solo se $\eta \in [ISL^\circ, ISL_{MF}]$, al fine di ottenere un valore ammissibile, nei progetti è stato calcolato preliminarmente il valore di ISL_{MF} (cioè nel caso del filtro adattato), ed il valore di ISL° (ossia quello che si ottiene nel progetto a minimo ISL); quindi, è stato scelto un valore di η pari al centro dell'intervallo ammissibile.

In figura (3.5) si riportano i moduli delle cross-correlazioni relative al caso MF ed al caso MMF per $P = 13$.

In Tabella 3.5.1 si confrontano le prestazioni del filtro disadattato qui considerato con quelle del relativo filtro adattato e del relativo filtro a minimo ISL . Il progetto ci permette di attingere all' ISL desiderato,

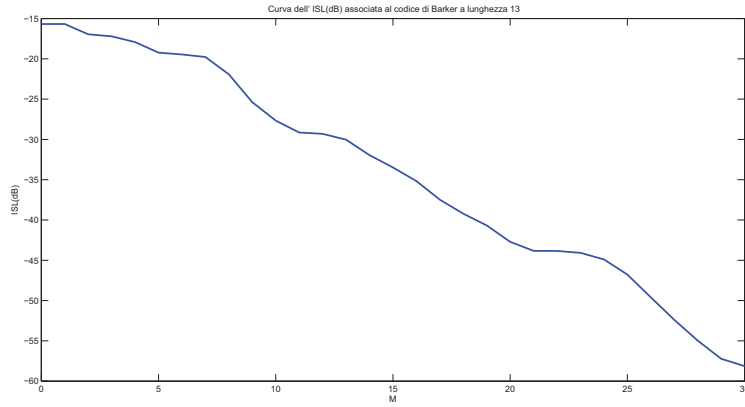


Figura 3.4: Andamento dell' ISL° in dB in funzione di M nel caso di codice di Barker 13.

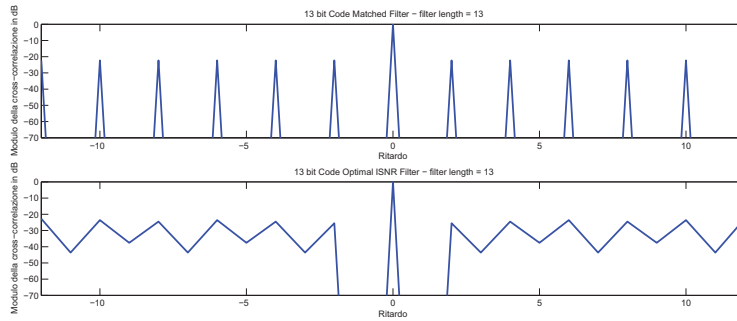


Figura 3.5: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo $ISNR$, con vincolo sull' ISL , di lunghezza 13.

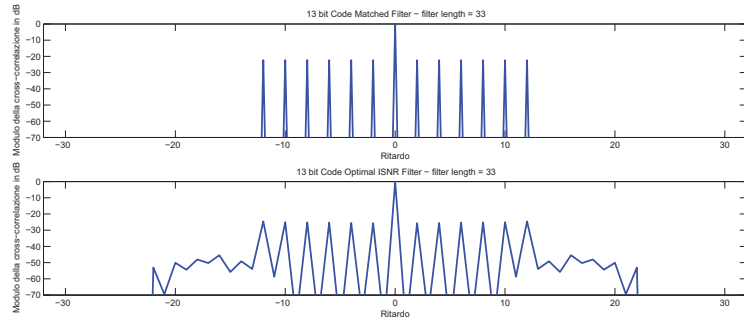


Figura 3.6: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo $ISNR$, con vincolo sull' ISL , di lunghezza 33.

ovvero, al prefissato valore di η in dB. Come si può notare, il valore di $ISNR$ ottenuto è ovviamente più grande di quello fornito dal filtro MF ma risulta inferiore (e quindi migliore) rispetto al progetto a minimo ISL .

	MF	min- $ISNR$	min- ISL
$ISL(\text{dB})$	-11.4871	-13.0966	-15.6820
$PSL(\text{dB})$	-22.2789	-22.7498	-24.0045
$ISNR(\text{dB})$	-11.1394	-11.1270	-10.9964

Tabella 3.3: Differenze di prestazione tra filtro MF, MMF a minimo $ISNR$ e MMF a minimo ISL per $P = 13$ nel caso di codice di Barker 13.

La figura (3.6) mostra il grafico relativo al progetto per $P = 33$. Infine in Tabella 3.5.1 viene effettuato un confronto delle prestazioni osservate.

	MF	min- $ISNR$	min- ISL
$ISL(\text{dB})$	-11.4871	-14.3941	-27.6744
$PSL(\text{dB})$	-22.2789	-24.5769	-34.2736
$ISNR(\text{dB})$	-11.1394	-11.1223	-10.9373

Tabella 3.4: Differenze di prestazione tra filtro MF, MMF a minimo $ISNR$ e MMF a minimo ISL per $P = 33$ nel caso di codice di Barker 13.

In questo caso valgono le stesse considerazioni precedenti, ovvero, il

progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL costituisce un compromesso tra il filtro adattato ed il filtro a minimo ISL . Anche in tal caso notiamo delle differenze minime per quanto riguarda l' $ISNR$.

Si può notare, inoltre, che l' $ISNR$ ottenuto per $P = 33$ è più grande (quindi peggiore) dell' $ISNR$ per $P = 13$ coerentemente col fatto che per $P = 33$ scegliamo un valore di η , e quindi di ISL , inferiore, e quindi il minimo valore di $ISNR$ raggiungibile è più grande rispetto al caso di $P = 13$.

Se invece si impone anche nel secondo caso ($P = 33$) lo stesso valore di η del primo caso, otteniamo un filtro con lo stesso valore di ISL del primo caso, corrispondente al vincolo considerato, pari a -13.0966dB , mentre un valore di $ISNR$ pari a -11.1334dB , ossia un valore questa volta migliore rispetto al primo caso (-11.1270dB). In conclusione, anche in questo tipo di progetto ad un aumento di M corrisponde un miglioramento delle prestazioni del filtro rispetto alla metrica che il filtro vuole minimizzare, in tal caso l' $ISNR$, a patto di considerare sempre lo stesso vincolo η sull' ISL .

Progetto a minimo PSL per lunghezza del filtro $P = 13$ e $P = 33$

In questa sezione consideriamo il progetto a minimo PSL . Poichè il codice in trasmissione considerato è un codice binario, i filtri progettati a partire da esso saranno sempre a coefficienti reali. Per tal motivo, quello che in tal caso verrà affrontato è un problema di programmazione lineare.

La figura (3.7) mostra i moduli delle cross-correlazioni relative al caso MF ed al caso MMF per $P = 13$. Si può notare come i lobi laterali in uscita al filtro disadattato siano pressochè piatti, il che è una caratteristica tipica dei progetti a minimo PSL .

In Tabella 3.5.1 si può notare il miglioramento del PSL di una quantità pari a 3.5dB rispetto al caso MF. Il progetto ha portato anche ad un miglioramento dell' ISL ed il tutto al costo di un lieve peggioramento dell' $ISNR$.

In figura (3.8) è presente, invece, il grafico relativo al progetto per $P = 33$. In tal caso l'appiattimento dei lobi laterali è molto più evidente rispetto al caso precedente. L'aumento di M comporta un aumento dei gradi di libertà a disposizione del filtro, permettendo quindi una più efficace ottimizzazione della metrica PSL nella fase di progettazione,

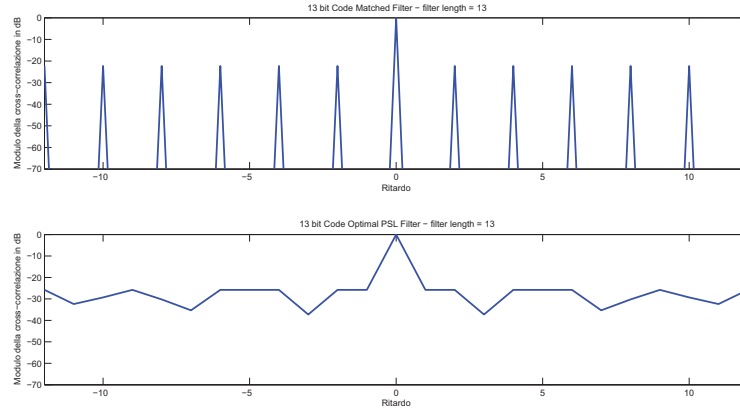


Figura 3.7: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo PSL di lunghezza 13.

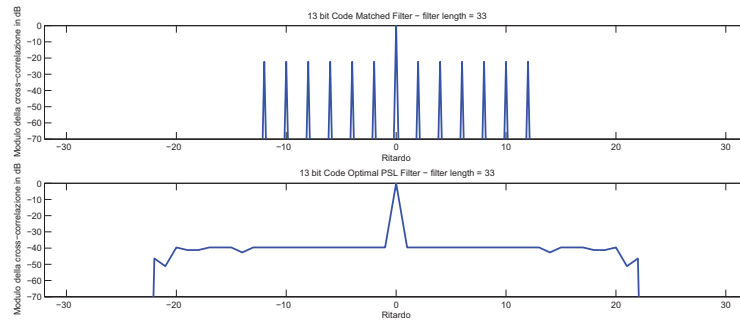


Figura 3.8: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo PSL di lunghezza 33.

	MF	MMF
$ISL(\text{dB})$	-11.4871	-13.6350
$PSL(\text{dB})$	-22.2789	-25.7858
$ISNR(\text{dB})$	-11.1394	-10.9154

Tabella 3.5: Differenze di prestazione tra filtro MF e filtro MMF a minimo PSL per $P = 13$ nel caso di codice di Barker 13.

così come si evince dal maggiore appiattimento dei lobi laterali e dai valori riportati in Tabella 3.5.1.

	$P = 13$	$P = 33$
$ISL(\text{dB})$	-13.6350	-23.7873
$PSL(\text{dB})$	-25.7858	-39.6218
$ISNR(\text{dB})$	-10.9154	-10.9543

Tabella 3.6: Differenze di prestazione tra filtri MMF a minimo PSL per $P = 13$ e $P = 33$ nel caso di codice di Barker 13.

Si può notare un ulteriore notevole miglioramento del PSL di una quantità pari a 13.84dB rispetto al primo caso. Il progetto ha portato anche ad un notevole miglioramento dell' ISL ed il tutto al costo di un lieve peggioramento dell' $ISNR$.

La figura (3.9) mostra i diversi valori di PSL (dB) che si ottengono dal progetto a minimo PSL al variare del parametro di progetto M , confermando quanto affermato circa il legame tra lunghezza del filtro ricevente ed incremento delle prestazioni.

Progetto del Filtro Ottimo secondo Pareto per lunghezza del filtro $P = 13$ e $P = 33$

In questo paragrafo viene mostrata l'applicazione della teoria dell'ottimizzazione vettoriale e degli ottimi di Pareto al progetto di filtri MMF destinati a sistemi di rilevamento attivo come i radar. Il problema vettoriale affrontato ha coinvolto due delle metriche rilevanti, cioè il PSL e l' ISL . Poichè in tal caso si considera come sequenza \mathbf{s} un codice di Barker binario, il filtro ad esso associato sarà sempre a valori reali, per cui, come nel progetto a minimo PSL , anche in tal caso si è affrontato dei problemi di ottimizzazione lineare (LP).

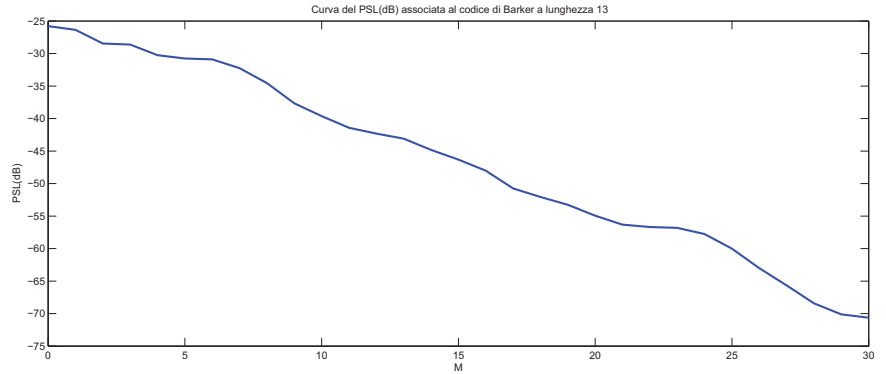


Figura 3.9: Andamento dell' PSL in funzione di M nel caso di progetto a minimo PSL con codice di Barker 13.

Consideriamo il progetto del filtro per $P = 13$. Il progetto è stato calcolato per diversi valori del peso γ dell' ISL . Ciascun valore di γ ha permesso di trovare un diverso ottimo di Pareto \mathbf{x} , coerentemente con quanto atteso dalla teoria. Infine, per tutti i progetti ottenuti sono state calcolate le cross-correlazioni con il codice \mathbf{s} i cui moduli sono stati messi a confronto in figura (3.10).

All'aumentare di γ aumenta il peso dell' ISL rispetto al PSL nel problema vettoriale scalarizzato. Quindi, intuitivamente, si può comprendere come all'aumentare del peso si ottenga man mano un filtro con prestazioni sempre migliori in termini di ISL . La figura conferma quanto affermato: all'aumentare di γ si ottengono dei filtri disadattati i cui lobi laterali in uscita sottendono un'area man mano sempre più piccola.

Se è vero che aumentando γ migliora l' ISL , è anche vero che tale miglioramento avviene a discapito del PSL . Nel problema vettoriale bi-criterio considerato esiste, quindi, un trade-off tra le due metriche per cui è possibile migliorare il valore di una funzione obiettivo, aumentandone il peso relativo nel progetto, ma solo a costo del peggioramento del valore dell'altra. In figura (3.11) ciascun punto sulla curva rappresenta una coppia di valori ($ISL(\text{dB})$, $PSL(\text{dB})$) ciascuna associata ad un diverso valore di γ e quindi ad un diverso ottimo di Pareto.

Tale curva è la *curva ottima di Pareto* che contiene tutti i valori ottimi di Pareto del problema considerato e giace sulla frontiera dell'insieme \mathcal{O} dei valori ammissibili della funzione obiettivo. Un valore ottimo di Pareto

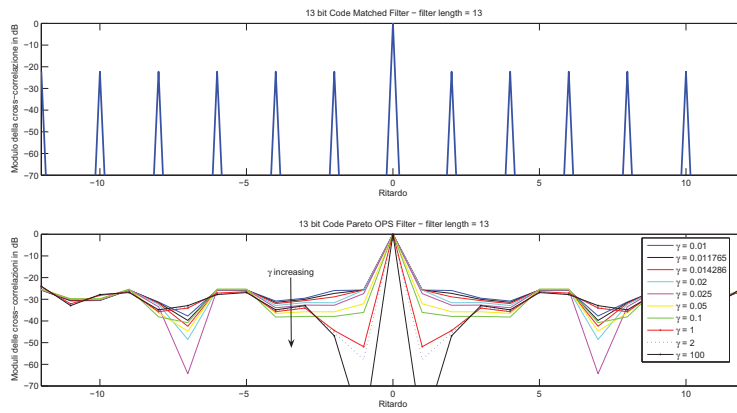


Figura 3.10: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: moduli delle cross-correlazioni del codice coi filtri ottimi secondo Pareto di lunghezza 13 e per valori di γ indicati in legenda.

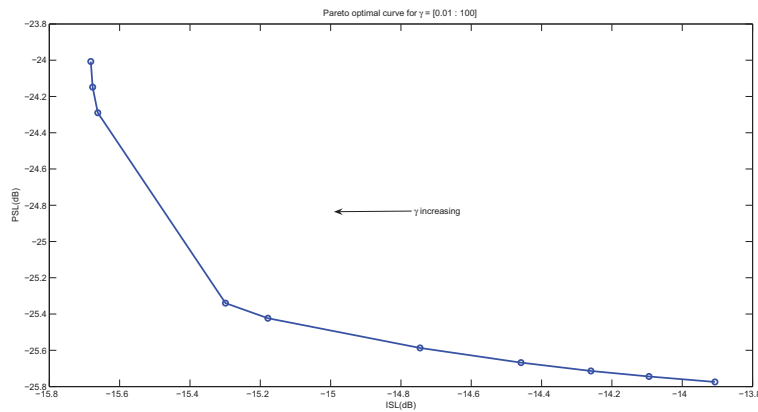


Figura 3.11: Curva ottima di Pareto relativa al codice di Barker 13 per lunghezze dei filtri P pari a 13.

è un valore ammissibile della funzione obiettivo che giace sulla frontiera di \mathcal{O} . Tutti i valori al di sotto della curva sono valori non ammissibili della funzione obiettivo considerata, mentre tutti i valori al di sopra di essa costituiscono valori ammissibili che però non sono ottimi secondo Pareto [1].

La curva è monotonicamente decrescente a dimostrazione del legame inverso tra *ISL* e *PSL*. L'estremo punto a destra sulla curva rappresenta il valore ottimo ottenuto dal minimo valore di γ considerato; esso, infatti, porta ad un progetto in cui l'*ISL* ha peso minimo rispetto al *PSL*, per cui al filtro \mathbf{x} ottenuto è associato il massimo valore di *ISL* ed il minimo valore di *PSL*. Aumentando γ aumenta il peso relativo dell'*ISL* per cui si ottengono filtri con *ISL* man mano migliore e *PSL* man mano peggiore, risalendo la curva da destra verso sinistra.

Nel caso di un problema convesso bi-criterio, come quello considerato, la curva ottima di Pareto è di facile interpretazione. La pendenza della curva in un suo punto mostra il trade-off locale, cioè il trade-off delle due funzioni obiettivo nell'intorno di quel valore ottimo di Pareto. Nei punti in cui la pendenza è ripida negoziamo piccole variazioni dell'*ISL* con variazioni relativamente grandi del *PSL*, e viceversa nei punti a bassa pendenza.

Per completezza si mostrano i risultati analoghi ottenuti per $P = 33$. In figura (3.12) sono rappresentati i moduli delle cross-correlazioni relative ai diversi ottimi di Pareto.

Qui valgono le stesse osservazioni fatte in precedenza: all'aumentare di γ l'area sottesa dai lobi laterali delle cross-correlazioni diminuisce.

Anche sulla curva ottima di Pareto, mostrata in figura (3.13), valgono le osservazioni precedenti. Vale la pena, invece, osservare che la curva ottenuta in questo secondo caso è posta ben al di sotto della curva precedente. Ne possiamo dedurre che anche nei problemi di ottimizzazione vettoriale aumentare la lunghezza del filtro da progettare porta ad un miglioramento delle prestazioni; infatti, per uno stesso valore di γ , il progetto per $P = 33$ porta ad una coppia di valori (*ISL*(dB), *PSL*(dB)) decisamente migliori di quelli ottenuti per $P = 13$. Poichè i miglioramenti si sono potuti apprezzare sia nel progetto a minimo *ISL* che nel progetto a minimo *PSL*, non dovrebbe meravigliare che ciò avvenga anche nel caso di un'ottimizzazione congiunta delle due metriche. Ancora un volta emerge l'importanza del parametro di progetto M : aumentare il suo valore è l'unico modo per migliorare sia l'*ISL* che il *PSL*; il compromesso

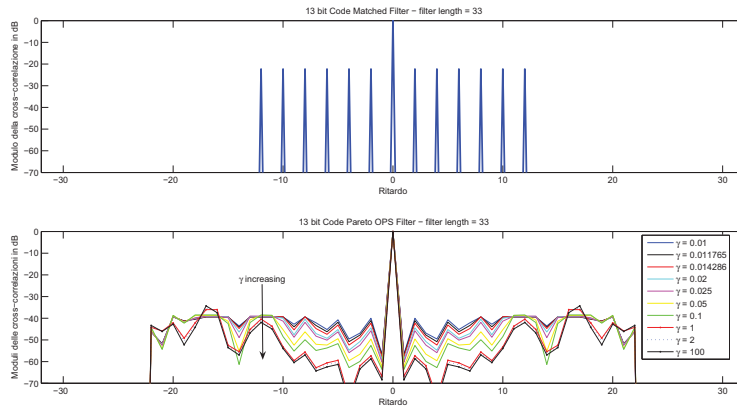


Figura 3.12: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker 13. In basso: moduli delle cross-correlazioni del codice coi filtri ottimi secondo Pareto di lunghezza 33 e per valori di γ indicati in legenda.

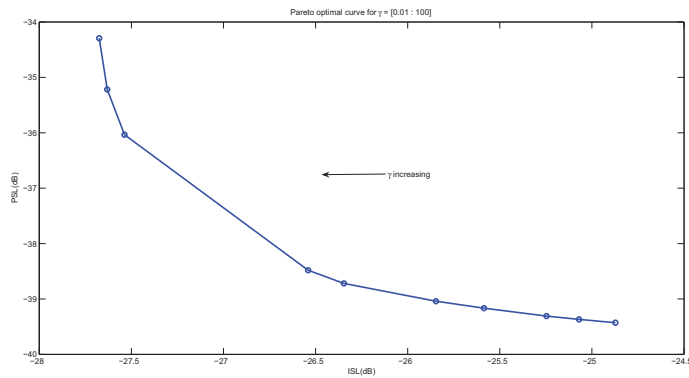


Figura 3.13: Curva ottima di Pareto relativa al codice di Barker 13 per lunghezze dei filtri P pari a 33.

è quello di un ricevitore più complesso e quindi più costoso.

3.5.2 Codice di Barker Polifase a lunghezza 34

In questa sezione sono esposti i risultati numerici relativi ad un altro tipo di codice, questa volta non più binario ma polifase. Infatti, permettendo la scelta di valori di fase qualsiasi, è possibile ottenere codici con autocorrelazioni dai lobi laterali ancora più bassi. Va detto che per qualunque codice, polifase o binario, il lobo laterale estremo è sempre pari ad 1. Le sequenze polifase a minimo PSL , escludendo i lobi laterali estremi, sono dette *codici di Barker polifase*. Il codice qui considerato è quello a lunghezza 34 [36].

Nella Tabella 3.5.2 si confrontano le prestazioni dei filtri adattati relativi al suddetto codice polifase ed al codice binario MPS (Minimum Peak Sidelobe) della stessa lunghezza 34. Avendo i due codici la stessa lunghezza, e non essendo i relativi sottoimpulsi modulati in ampiezza ma solo in fase, i due codici presentano lo stesso valore di $ISNR$. Diversamente, il PSL nel caso polifase risulta migliore di 9.54dB rispetto al PSL relativo al codice binario; allo stesso modo, seppur in misura minore, anche l' ISL risulta migliore nel caso polifase.

	MPS-34	Polifase-34
$ISL(\text{dB})$	-9.4901	-13.7136
$PSL(\text{dB})$	-21.0872	-30.6296
$ISNR(\text{dB})$	-15.3148	-15.3148

Tabella 3.7: Differenze di prestazione tra filtri MF nel caso di codice MPS 34 e codice di Barker polifase 34.

Permettere ai sottoimpulsi di assumere un valore complesso significa avere maggiori gradi di libertà nella ricerca di codici dalle caratteristiche desiderate; il codice MPS è il migliore dei codici binari in termini di PSL , ma non sarà mai anche il codice migliore nell'insieme dei codici polifase di lunghezza N .

Sebbene tale considerazione suggerisca di preferire sempre un codice \mathbf{s} di tipo polifase, la scelta è condizionata dalla complessità, e quindi dal costo economico, del relativo apparato di trasmissione.

Nei progetti che seguono è stata prefissata una lunghezza dei filtri P pari a 68. Per quanto riguarda i progetti a minimo PSL e di filtro ottimo

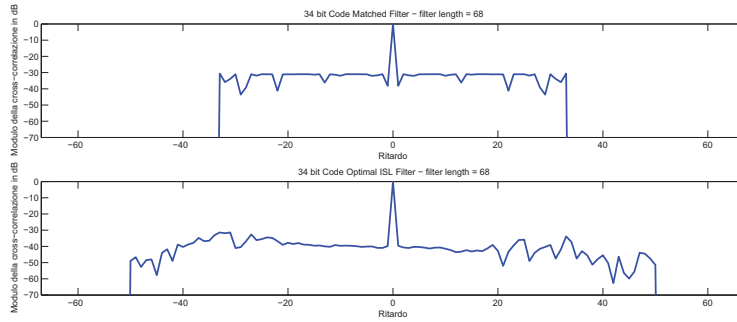


Figura 3.14: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker polifase 34. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo *ISL* di lunghezza 68.

secondo Pareto va osservato che, essendo qui s polifase, in entrambi i casi si affronta un problema di ottimizzazione convessa di tipo *SOCP*.

Progetto a minimo *ISL*

In figura (3.14) si confrontano i moduli delle cross-correlazioni relative al caso MF ed al progetto a minimo *ISL* associato al suddetto codice polifase.

La Tabella 3.5.2 mostra le differenze di prestazione col filtro adattato. Il filtro ottimo ottenuto dalla minimizzazione dell'*ISL* ha portato ad un valore di tale metrica inferiore a quello ottenuto dal relativo filtro adattato di una quantità pari a 5.4dB. Anche il *PSL* risulta lievemente migliore nel caso MMF mentre l'*ISNR* risulta lievemente peggiore.

	MF	MMF
<i>ISL</i> (dB)	-13.7136	-19.1126
<i>PSL</i> (dB)	-30.6296	-31.4128
<i>ISNR</i> (dB)	-15.3148	-15.1464

Tabella 3.8: Differenze di prestazione tra filtro MF e filtro MMF a minimo *ISL* per $P = 68$ nel caso di codice di Barker polifase 34.

La figura (3.15) mostra il miglioramento dell'*ISL*(dB) all'aumentare di M .

Confrontando tale curva in figura (3.16) con la corrispondente curva relativa al codice di Barker 13 si nota che all'aumentare di M i miglio-

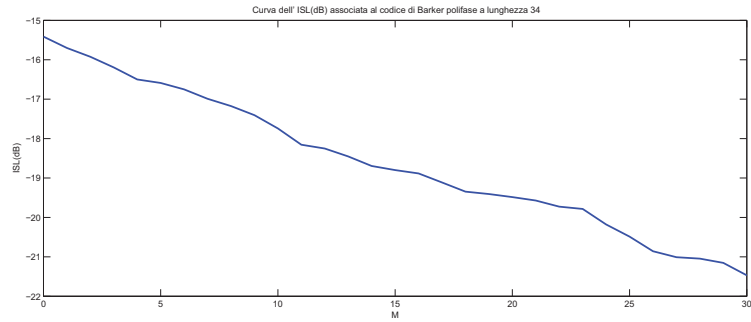


Figura 3.15: Andamento dell' ISL° in dB in funzione di M nel caso di codice di Barker polifase 34.

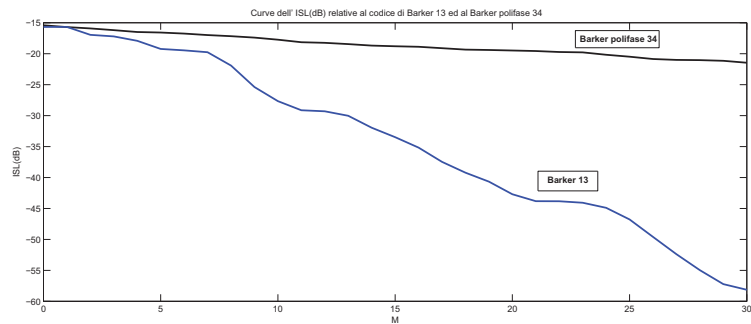


Figura 3.16: Andamento dell' ISL° in dB in funzione di M nel caso di codice di Barker 13 e di Barker polifase 34.

ramenti in termini di ISL sono inferiori rispetto al caso del codice di Barker 13. Infatti, l'entità dei miglioramenti rispetto al caso MF e la rapidità con cui l' ISL (dB) decresce all'aumentare di M , non sono funzioni solo di M ma proporzionali al rapporto M/N . Poichè il codice polifase considerato è più lungo del Barker 13, non deve meravigliare, quindi, che la curva associata al codice binario decresca più rapidamente della corrispondente curva relativa al codice polifase.

Tale discorso vale anche per quanto riguarda le differenze di prestazione in termini di PSL al variare dei parametri di progetto.

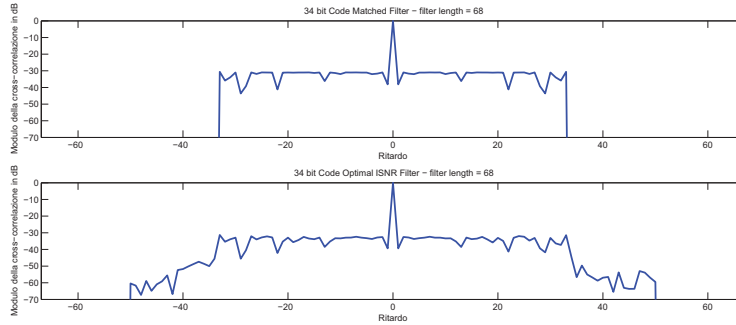


Figura 3.17: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker polifase 34. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo $ISNR$, con vincolo sull' ISL , di lunghezza 68.

Progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL

In questa sezione è presentato il progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL (figura (3.17)). La scelta di η è stata fatta come in precedenza, ossia è stato scelto il valore intermedio tra il valore di ISL fornito dal relativo progetto a minimo ISL e quello fornito dal relativo filtro adattato.

La tabella 3.5.2 evidenzia le differenze. Avendo scelto un valore intermedio di η , e quindi di ISL , anche l' $ISNR$ ottenuto dal progetto ha un valore intermedio, peggiore del caso MF ma migliore del caso a minimo ISL . L'entità delle differenze di prestazione dipendono dalla scelta del vincolo, ossia dal valore di ISL che si vuole ottenere; tra tutti i filtri \mathbf{x} di lunghezza P ottenibili a partire da \mathbf{s} e caratterizzati da quel prefissato valore di ISL , tale progetto garantisce il minimo $ISNR$.

	MF	min- $ISNR$	min- ISL
$ISL(\text{dB})$	-13.7136	-15.6231	-19.1126
$PSL(\text{dB})$	-30.6296	-31.3244	-31.4128
$ISNR(\text{dB})$	-15.3148	-15.3019	-15.1464

Tabella 3.9: Differenze di prestazione tra filtro MF, MMF a minimo $ISNR$ e MMF a minimo ISL per $P = 68$ nel caso di codice di Barker polifase 34.

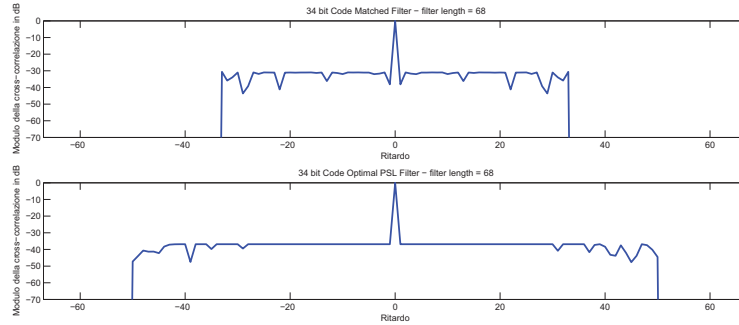


Figura 3.18: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker polifase 34. In basso: modulo della cross-correlazione del codice col filtro a minimo PSL di lunghezza 68.

Progetto a minimo PSL

In questa sezione vengono mostrati i risultati relativi al progetto a minimo PSL . Poichè il codice in trasmissione considerato è un codice a coefficienti complessi il relativo progetto a minimo PSL è un problema di ottimizzazione convessa $SOCP$.

Il filtro è stato ottenuto attraverso la minimizzazione del PSL col vincolo che $\mathbf{x}^* \mathbf{s} = N$. Tra tutti i vettori \mathbf{x} di lunghezza 68 ottenibili a partire da \mathbf{s} e soddisfacenti il vincolo, il progetto garantisce di fornire quello con PSL minimo.

In figura (3.18) si può apprezzare l'appiattimento, rispetto all'uscita del filtro adattato, dei lobi laterali del modulo della cross-correlazione in uscita al filtro disadattato, segno di un progetto efficace.

In Tabella 3.5.2 si confrontano le prestazioni dei filtri.

	MF	MMF
$ISL(\text{dB})$	-13.7136	-17.5142
$PSL(\text{dB})$	-30.6296	-36.8729
$ISNR(\text{dB})$	-15.3148	-15.1579

Tabella 3.10: Differenze di prestazione tra filtro MF e filtro MMF a minimo PSL per $P = 68$ nel caso di codice di Barker polifase 34.

Si può osservare come il PSL diminuisca nel caso MMF, rispetto al caso MF, di una quantità pari a 6.2433dB. Pur essendo il codice polifase

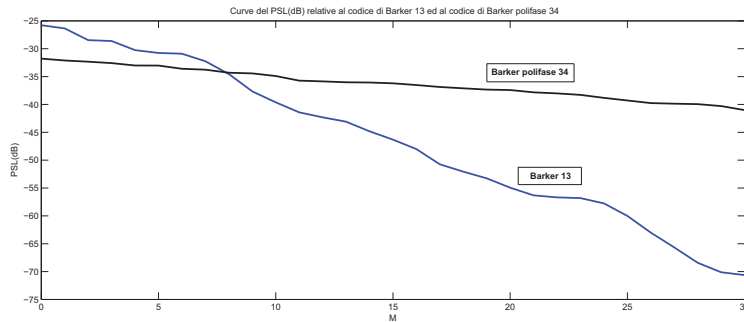


Figura 3.19: Andamento dell' PSL (dB) in funzione di M nel caso di progetto a minimo PSL , con codice di Barker 13 e codice di Barker polifase 34.

considerato un codice già di per sè apprezzabile nel senso del PSL , l'approccio MMF alla progettazione dei filtri in ricezione ha permesso un ulteriore miglioramento di tale metrica. Aumentando la lunghezza del filtro è sempre possibile ottenere ulteriori miglioramenti delle prestazioni ma, così come nel progetto a minimo ISL , anche in tal caso l'entità dei miglioramenti è funzione del rapporto M/N .

In figura (3.19) la curva relativa al miglioramento del PSL (dB) all'aumentare di M relativa al codice di Barker 13 (si veda figura (3.9)) è messa a confronto con la corrispondente curva relativa al caso di codice di Barker polifase 34. Si noti come la curva relativa al codice polifase parta inizialmente da valori inferiori (quindi migliori) rispetto alla curva relativa al codice binario, ma venga poi superata da quest'ultima in virtù della dipendenza dal rapporto M/N .

Progetto del Filtro Ottimo secondo Pareto

Essendo s polifase, analogamente al progetto a minimo PSL anche in tal caso per il progetto dei filtri si è affrontato dei problemi di ottimizzazione convessa $SOCP$.

Osservando i moduli delle cross-correlazioni in figura (3.20) si può apprezzare come all'aumentare di γ esse sottendano un'area man mano minore a discapito del massimo valore di picco nei lobi laterali. In pratica, si passa da un filtro dalle prestazioni più simili a quelle del relativo filtro a minimo PSL ad un filtro dalle prestazioni più simili a quelle del relativo filtro a minimo ISL , attraverso filtri dalle prestazioni inter-

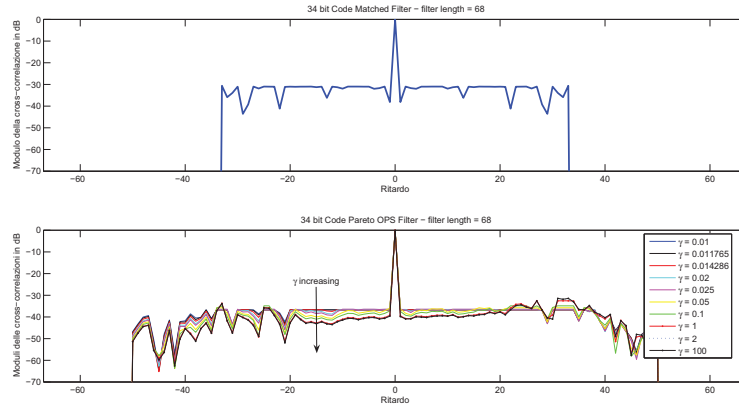


Figura 3.20: In alto: modulo dell'autocorrelazione del codice di Barker polifase 34. In basso: moduli delle cross-correlazioni del codice coi filtri ottimi secondo Pareto di lunghezza 68 per valori di γ indicati in legenda.

medie. La curva ottima di Pareto in figura (3.21) evidenzia il trade-off esistente tra le due metriche. La pendenza della curva in un suo punto mostra, invece, il trade-off locale, ossia nell'intorno di quel valore ottimo di Pareto.

Per concludere, fissati i parametri di progetto quali codice \mathbf{s} in trasmissione e lunghezza del filtro, od a seconda, ad esempio, della risoluzione in range che si vuole ottenere, del costo del sistema, e di altre metriche rilevanti non considerate, tale curva può essere consultata in fase finale di progetto per selezionare il filtro dalle prestazioni desiderate.

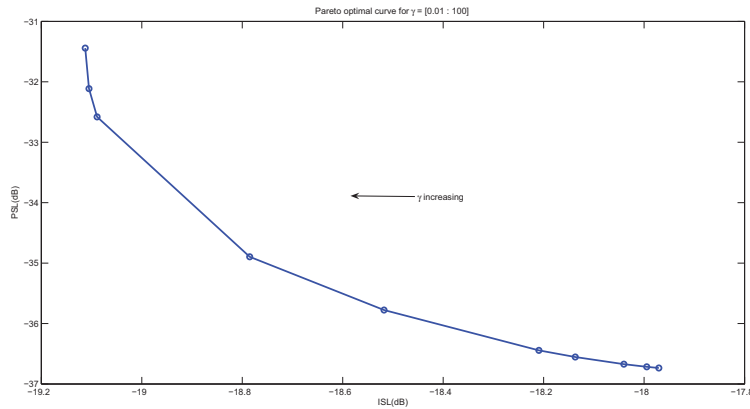


Figura 3.21: Curva ottima di Pareto relativa al codice di Barker polifase 34 e filtri di lunghezza P pari a 68.

3.6 Conclusioni e Sviluppi Futuri

In questo Capitolo è stato preso in considerazione il problema della sagomatura del filtro in ricezione di un sistema di rilevamento attivo nel caso in cui il segnale ricevuto sia affetto da interferenze dovute agli indesiderati echi di ritorno provenienti dall'ambiente (clutter), oltre che dal rumore termico. Essendo il classico filtro adattato ottimo solo nel caso AWN (Additive White Noise) o nel caso single-target, è stata mostrata la sua inefficienza nel caso multi-target e di segnale affetto da clutter, e quindi la necessità di ricorrere al più versatile filtro disadattato. I filtri disadattati considerati sono stati ottenuti tramite la minimizzazione di opportune metriche rilevanti, impostando i progetti in forma di problemi di ottimizzazione convessa. Le metriche considerate sono il PSL (Peak Sidelobe Level), l' ISL (Integrated Sidelobe Level) e l' $ISNR$ (Inverse Signal-to-Noise Ratio). I progetti sono stati considerati e testati a partire da un codice in trasmissione prefissato; in particolare si considera un codice binario ed un codice polifase.

Nei risultati sperimentali si è messo in evidenza l'abbattimento dei lobi laterali in uscita al filtro ottenuto dal progetto a minimo PSL , cosa che lo rende appetibile nel caso di uno scenario con clutter "non denso", caratterizzato ossia dalla presenza di pochi scatteratori forti reciprocamente interferenti.

Nel progetto a minimo ISL si è potuto apprezzare, invece, la diminuzione, rispetto al filtro adattato, dell'area sottesa dai lobi laterali in uscita al filtro, cosa che lo rende, invece, più adatto al caso di uno scenario con clutter "denso", ossia uniformemente distribuito, in cui si è più interessati a diminuire l'energia complessiva associata alle componenti di disturbo e di interferenza sul segnale ricevuto anzichè abbassare i picchi dei lobi laterali.

Il progetto a minimo $ISNR$ con vincolo sull' ISL permette di ottenere un filtro dal valore di ISL desiderato ed opportunamente prefissato. Opportunamente scelti i parametri di progetto N , \mathbf{s} ed M a seconda delle esigenze del sistema da progettare, e prefissato il desiderato valore η dell' ISL , anch'esso opportunamente scelto all'interno di un intervallo di ammissibilità, il progetto garantisce di fornire il filtro a minimo $ISNR$ tra tutti quelli di lunghezza P ottenibili a partire da \mathbf{s} e soddisfacenti il vincolo. Tale progetto è in grado di fornire filtri dalle prestazioni intermedie tra quelle fornite dai relativi filtri adattati e i relativi filtri a minimo ISL .

Il contributo personale apportato riguarda l'applicazione della teoria dell'ottimizzazione vettoriale e degli ottimi di Pareto al progetto di filtri disadattati. In particolare, è stato impostato un problema vettoriale bi-criterio con il PSL e l' ISL considerate come funzioni obiettivo da minimizzare congiuntamente. L'analisi effettuata ha portato, per \mathbf{s} e lunghezza del filtro prefissate, alle curve ottime di Pareto, che mostrano il trade-off esistente tra le due metriche. Al variare del peso relativo γ dell' ISL rispetto al PSL , il progetto fornisce dei filtri dalle prestazioni intermedie tra quelle relative ai filtri a minimo ISL ed a minimo PSL , con caratteristiche più simili all'uno rispetto all'altro a seconda del valore del peso di Pareto. Per tal motivo il progetto è ideale nel caso di uno scenario con clutter "misto", in cui si desideri sia diminuire l'altezza dei lobi laterali sia che questi sottendano un'area minore rispetto al caso del filtro adattato. Osservando la curva ottima di Pareto è possibile scegliere, tra quelli ammissibili, il filtro ottimo dalle prestazioni desiderate.

Infine, va sottolineato che, benchè nel problema di ottimizzazione vettoriale sono stati considerati il PSL e l' ISL come funzioni obiettivo, quest'ultimo tipo di approccio alla progettazione di filtri disadattati può essere esteso considerando l' $ISNR$ in luogo di una delle due precedenti metriche, o in aggiunta ad esse, oppure considerando anche metriche differenti da quelle considerate in questo lavoro di tesi.

Capitolo 4

Stima Vincolata della Matrice di Covarianza del Disturbo Radar

4.1 Introduzione

In questo Capitolo viene affrontato il problema della stima della matrice di covarianza della componente di disturbo presente in un sistema radar. Dopo una breve introduzione sulle principali componenti di disturbo presenti nei sistemi radar e sull'importanza della conoscenza di una stima accurata della matrice di covarianza nei ricevitori adattivi viene formulato analiticamente il problema della stima della matrice di covarianza da affrontare. In particolare, viene presentato il problema della stima ML della matrice di covarianza del disturbo radar con un vincolo sul numero di condizionamento della matrice stimata. Viene mostrato come tale stima possa essere ottenuta come soluzione di un problema di ottimizzazione convessa di tipo *MAXDET*, e come, attraverso ulteriori considerazioni, possa essere ottenuto attraverso la risoluzione di un problema di ottimizzazione convesso di una sola variabile reale.

Infine, le prestazioni ottenibili dallo stimatore proposto vengono confrontate con le prestazioni conseguibili con gli stimatori della matrice di covarianza di sovente impiegati in ambito radar.

4.2 Fonti di disturbo nei sistemi radar

In un sistema radar il segnale ricevuto è dato dalla sovrapposizione di più contributi. In particolare, oltre al segnale utile (segnale riflesso dal bersaglio) occorre considerare anche i segnali provenienti da altre sorgenti interferenti¹. Questi ultimi, non sono utili ai fini della rivelazione del bersaglio e costituiscono parte di quello che viene genericamente indicato come “disturbo”. Pertanto, in ambito radar, le fonti di disturbo possono essere di diversa natura [37] e, tra queste, quelle che rivestono il ruolo principale sono: rumore termico, clutter e jamming.

La presenza contemporanea di tali cause di disturbo, generalmente con caratterizzazione non note a priori, suggerisce che un miglioramento significativo delle prestazioni del sistema radar sia ottenibile attraverso l'utilizzo di ricevitori adattivi [38], [39]. L'obiettivo dei ricevitori adattivi è quello di modificare il processing da effettuare in funzione delle condizioni operative, cioè, adattandosi al contesto effettivo in cui si trovano ad operare.

Il corretto funzionamento di questa tipologia di ricevitori richiede una stima affidabile della matrice di covarianza del disturbo. In un ricevitore adattivo, la matrice di covarianza del disturbo è stimata a partire da dati secondari², ipotizzando, che le celle spazialmente vicine a quella sotto test abbiano le stesse caratteristiche spettrali della cella sotto esame. In altri termini, il funzionamento dei ricevitori radar adattivi richiede che l'ambiente radar circostante alla cella sotto test sia omogeneo nella finestra spaziale usata per il processo di adattamento.

In ricezione, al fine di garantire l'omogeneità dei dati secondari, è possibile effettuare un filtraggio intelligente considerando esclusivamente gli osservabili omogenei riducendo, di conseguenza, il numero di dati secondari utilizzabili [40, Cap. 6].

Proprio la necessità di considerare dati omogenei rappresenta una limitazione piuttosto significativa poichè, in un sistema radar, il numero di dati secondari omogeneo risulta essere limitato [41]. A causa della scarsa disponibilità di campioni, la matrice di covarianza risulta difficilmente stimabile, e, di riflesso, si osservano perdite significative in termini di capacità di rivelare il bersaglio dovute al ridotto grado di annullamento

¹Anche i ritorni elettromagnetici provenienti da oggetti che circondano il bersaglio possono essere visti come segnali interferenti.

²Echi relativi a celle spazialmente vicine a quella sotto test.

dell'interferenza rispetto al caso di quantità significative di dati omogenei elaborabili [42].

Per questo motivo, il problema della stima della matrice di covarianza del disturbo, in ambiente radar, è stato ampiamente trattato in letteratura [43], [44], [45], [46]. Sono state suggerite diverse soluzioni per poter stimare tale grandezza, ma molte delle tecniche di stima proposte riescono a raggiungere delle prestazioni soddisfacenti in presenza di un numero di campioni sufficientemente elevato.

L'obiettivo che si intende conseguire in questo Capitolo, è quello di proporre un nuovo stimatore della matrice di covarianza del disturbo in ambito radar che soddisfi i requisiti di buon condizionamento e non singolarità a partire dal quale ottenere ricevitori adattivi altamente performanti anche in condizioni di scarsa disponibilità di campioni.

4.3 Modello analitico

Si supponga di avere a disposizione K vettori di osservabili complessi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K$, ciascuno di lunghezza N , a partire dai quali si vuole effettuare la stima della matrice di covarianza del vettore di disturbo della cella sotto test. Gli osservabili \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, K$, sono ipotizzati essere vettori aleatori i.i.d. (indipendenti indenticamente distribuiti) circolarmente Gaussiani a media nulla e matrice di covarianza $\mathbf{\Sigma} \succ 0$. Indicando con \mathbf{S} la matrice di covarianza campionaria, ovvero

$$\mathbf{S} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H,$$

la funzione di verosimiglianza logaritmica della matrice di covarianza $\mathbf{\Sigma}$, per le ipotesi fatte, si scrive come

$$\begin{aligned} l(\mathbf{\Sigma}) &= \log \left[\prod_{i=1}^K \frac{1}{(\pi)^N \det(\mathbf{\Sigma})} \exp(-\mathbf{x}_i^H \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_i) \right] = \\ &= -KN \log(\pi) - K \{ \text{Tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}) - \log [\det(\mathbf{\Sigma}^{-1})] \}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nell'ipotesi in cui $K > N$ la funzione $l(\mathbf{\Sigma})$ è massimizzata da \mathbf{S} , cioè tale matrice è la stima ML per la matrice di covarianza $\mathbf{\Sigma}$. Tale stimatore, presenta due notevoli proprietà:

1. la semplicità computazionale con cui è possibile ottenere \mathbf{S} , in quanto, occorre effettuare delle semplici operazioni sugli osservabili prelevati.
2. la matrice di covarianza campionaria è uno stimatore non polarizzato, pertanto, la matrice \mathbf{S} è lo stimatore che viene più comunemente adottato.

In molti scenari radar, come osservato in precedenza, si è costretti a lavorare in presenza di un numero di campioni ridotto, che spesso risulta essere inferiore alla dimensione della matrice di covarianza da stimare. In tale situazione, lo stimatore ML non esiste. Inoltre, la matrice di covarianza campionaria è singolare, quindi non definita positiva e pertanto non è invertibile. La non invertibilità della stima ottenuta costituisce un ostacolo piuttosto rilevante nell'ambito del *signal processing* in quanto, l'inversa della matrice di covarianza del disturbo stimata è un parametro richiesto in molte elaborazioni radar. Ad esempio, nel contesto dei ricevitori radar adattivi essa è richiesta per il calcolo del vettore dei pesi necessario per l'abbattimento dell'interferenza presente nell'ambiente operativo in esame.

Tuttavia, sebbene invertibile, anche quando $K > N$ la matrice \mathbf{S} si presenta numericamente non ben condizionata, a meno che il rapporto N/K sia estremamente piccolo rispetto all'unità. Pertanto, per valori di K nell'ordine di N , l'inversione della matrice di covarianza campionaria è instabile. Inoltre, le prestazioni conseguite in termini di cancellazione dell'interferenza non sono soddisfacenti [42].

Dunque, è chiaro che adottare in ambito radar la matrice di covarianza campionaria come stima della matrice $\mathbf{\Sigma}$ non è una scelta ragionevole in quanto, la \mathbf{S} si presenta, in generale, come mal condizionata e comporta prestazioni non soddisfacenti.

Nel contesto radar, quindi, assume un interesse notevole cercare di adottare uno stimatore ben condizionato, e quindi invertibile anche per matrici di covarianza con dimensioni piuttosto grandi rispetto al numero di campioni a disposizione per la sua stima.

Scopo del prossimo paragrafo è quello di presentare lo stimatore ML per la matrice di covarianza del disturbo in cui viene imposto un vincolo sul suo numero di condizionamento.

4.3.1 Stima ML della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento

Come anticipato nel Capitolo 1, il numero di condizionamento di una matrice $\Sigma \succ 0$ è definito come:

$$\text{cond}(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}(\Sigma)}{\lambda_{\min}(\Sigma)}$$

dove con $\lambda_{\max}(\Sigma)$ e $\lambda_{\min}(\Sigma)$ sono stati rispettivamente indicati il più grande ed il più piccolo autovalore della matrice Σ .

Affinchè la stima della matrice di covarianza Σ risulti essere ben condizionata, al problema della massimizzazione della funzione di verosimiglianza data in (4.1) è possibile aggiungere un vincolo sul numero di condizionamento della matrice stimata. Ovvero, è possibile richiedere che tale quantità sia limitata superiormente, cioè:

$$\text{cond}(\Sigma) \leq k_{\max}$$

dove k_{\max} è una costante assegnata. Con l'aggiunta di tale vincolo, il problema della stima ML della matrice di covarianza Σ si presenta come:

$$\begin{cases} \text{maximize} & l(\Sigma) \\ \text{subject to} & \text{cond}(\Sigma) \leq k_{\max} \end{cases} \quad (4.2)$$

Si è inoltre assunto come vincolo implicito che la matrice Σ sia definita positiva.

Al problema (4.2) è possibile dare il nome di *stima ML della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento*. E' immediato notare che il problema (4.2) è equivalente al seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & -l(\Sigma) \\ \text{subject to} & \text{cond}(\Sigma) \leq k_{\max} \end{cases} \quad (4.3)$$

oltretutto ai fini della minimizzazione di una funzione, eventuali fattori costanti che compaiono nella sua espressione non giocano alcun ruolo e pertanto è possibile semplificare l'espressione della funzione obiettivo data in (4.1). Pertanto, il problema di ottimizzazione, la cui soluzione definisce la stima ML con vincolo sul numero di condizionamento è:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{S}) - \log \det(\Sigma^{-1}) \\ \text{subject to} & \text{cond}(\Sigma) \leq k_{\max} \end{cases} \quad (4.4)$$

Osservando attentamente il problema (4.4) è possibile notare che non si presenta come un problema di ottimizzazione convesso; infatti, la sua funzione obiettivo non è una funzione convessa. Inoltre, nell'espressione del vincolo compare il rapporto degli autovalori, il quale, generalmente, non è una funzione convessa. Tuttavia, il problema (4.4) può essere riformulato come un problema di programmazione convessa come mostrato in [47]. Precisamente, si ha che il problema 4.4 è equivalente al seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Omega} \preceq k_{\max}u\mathbf{I} \end{cases} \quad (4.5)$$

Le variabili di ottimizzazione di questo problema sono $\mathbf{\Omega} \succ \mathbf{0}$ ed $u \in \mathbb{R}^{++}$. Il problema (4.5) è un problema di programmazione convessa in quanto, sia la funzione obiettivo che il vincolo sono convessi. Nello specifico, il vincolo in (4.5) è del tipo disuguaglianza matriciale lineare.

Si noti che il problema (4.5) rientra nella classe dei problemi di ottimizzazione convessa di tipo *MAXDET*. La soluzione ottima può essere ottenuta utilizzando i classici algoritmi per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione convessa, quali, ad esempio, l'algoritmo del punto interiore. Tale algoritmo presenta una complessità computazionale che, nel caso peggiore, è di tipo polinomiale rispetto al numero di variabili in gioco. Tuttavia, è necessario ricordare che esistono degli algoritmi dedicati alla risoluzione di problemi *MAXDET* che risultano più efficienti dell'algoritmo del punto interiore.

Il problema (4.5) presenta un numero di variabili da ottimizzare piuttosto significativo³; ciò fa sì che la complessità computazionale dell'algoritmo proposto per la stima della matrice di covarianza risulti elevata. E' importante, quindi, ricondurre il problema (4.5) ad un problema di ottimizzazione equivalente che presenta un numero di variabili ridotto. In [47] è mostrato come il problema (4.5) può essere ricondotto al seguente problema di ottimizzazione equivalente:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^N (l_i \mu_i - \log \mu_i) \\ \text{subject to} & u \leq \mu_i \leq k_{\max}u \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.6)$$

dove, $l_1 \geq \dots \geq l_N$ sono gli autovalori della matrice di covarianza campionaria, mentre μ_1, \dots, μ_N sono gli autovalori della matrice $\mathbf{\Omega}$ da ottimizzare.

³ $N(N+1)$ variabili reali.

Le variabili di ottimizzazione del problema (4.6) sono complessivamente $N + 1$, in quanto sono rappresentate da μ_1, \dots, μ_N ed u . Pertanto si osserva una drastica riduzione del numero di variabili da ottimizzare con un notevole vantaggio in termini di complessità computazionale dell'algoritmo di stima proposto.

Inoltre, dato il punto di ottimo μ_1^*, \dots, μ_N^* ed u^* per il problema (4.6), la soluzione del problema (4.5) è:

$$\Omega = Q\hat{\Lambda}Q^H, \quad (4.7)$$

dove si è indicata con Q la matrice unitaria di dimensione $N \times N$ lungo le cui colonne sono disposti gli autovettori della matrice di covarianza campionaria associati rispettivamente ad l_1, l_2, \dots, l_N , mentre con $\hat{\Lambda}$ si è indicata la matrice diagonale che presenta sulla diagonale principale gli autovalori μ_1^*, \dots, μ_N^* , soluzione del problema (4.6).

Dalla (4.7) è possibile ricavare l'espressione della stima della matrice di covarianza del disturbo tramite una semplice operazione di inversione:

$$\hat{\Sigma}_{cond} = Q\hat{\Lambda}^{-1}Q^H. \quad (4.8)$$

La (4.8) è proprio l'espressione analitica della soluzione del problema di ottimizzazione (4.2). Si noti che il problema (4.6) è equivalente al problema:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^N \min_{u \leq \mu_i \leq k_{\max} u} [l_i \mu_i - \log \mu_i] \quad (4.9)$$

Si osservi che la funzione obiettivo del problema (4.9) è una funzione separabile delle variabili μ_i, \dots, μ_N e che, come mostrato in [47], per un fissato u , il minimo di ciascun termine interno della (4.9) ha la seguente espressione:

$$\mu_i^*(u) = \arg \min_{u \leq \mu_i \leq k_{\max} u} (l_i \mu_i - \log \mu_i) = \min\{\max\{u, 1/l_i\}, k_{\max} u\}$$

Pertanto, il problema (4.6) si riduce ad un problema di ottimizzazione con il solo vincolo $u > 0$:

$$\text{minimize} \quad J_{k_{\max}}(u), \quad (4.10)$$

dove:

$$J_{k_{\max}}(u) = \sum_{i=1}^N J_{k_{\max}}^{(i)}(u)$$

mentre

$$J_{k_{max}}^{(i)}(u) = l_i \mu_i^*(u) - \log \mu_i^*(u) =$$

$$= \begin{cases} l_i(k_{max}u) - \log(k_{max}u) & u < 1/(k_{max}l_i) \\ 1 + \log l_i & 1/(k_{max}l_i) \leq u \leq 1/l_i \\ l_i u - \log u & u > 1/l_i. \end{cases}$$

Il problema (4.10) è un problema di ottimizzazione convessa in quanto ciascuna delle $J_{k_{max}}^{(i)}(u)$ è una funzione convessa di u . Questa formulazione continua a valere anche quando $l_i = 0$ a patto di considerare $1/l_i = +\infty$. Inoltre, il problema (4.10) presenta un'unica variabile di ottimizzazione ed il solo vincolo $u > 0$. Pertanto, la sua risoluzione consiste semplicemente nello studiare il minimo di una funzione convessa di una sola variabile. Studiando la monotonia della funzione $J_{k_{max}}^{(i)}(u)$ per $u > 0$ è possibile notare che essa si presenta costante sull'intervallo:

$$\left[\frac{1}{k_{max}l_i}, \frac{1}{l_i} \right],$$

La funzione $J_{k_{max}}^{(i)}(u)$ è strettamente decrescente se $u < 1/k_{max}l_i$ e strettamente crescente se $u > 1/l_i$. Pertanto, la funzione obiettivo del problema (4.10) presenta una regione sulla quale è costante e di minimo se e solamente se l'intersezione tra i suddetti intervalli è non vuota:

$$\left[\frac{1}{k_{max}l_1}, \frac{1}{l_1} \right] \cap \left[\frac{1}{k_{max}l_N}, \frac{1}{l_N} \right] \neq \emptyset$$

ovvero in modo equivalente, se $\frac{1}{k_{max}l_N} \leq \frac{1}{l_1}$ cioè $k_{max} \geq \text{cond}(\mathbf{S})$.

Si noti che se $k_{max} > \text{cond}(\mathbf{S})$, il punto di massimo u^* non è unico ma ve ne sono infiniti e sono tutti tali per cui $\mu_i(u^*) = l_i$ per $i = 1, \dots, N$ ed in tal caso lo stimatore della matrice di covarianza si riduce alla matrice di covarianza campionaria per ciascuno dei suddetti punti di massimo.

Nel caso $k_{max} < \text{cond}(\mathbf{S})$, che è quello di maggiore interesse in ambito radar, la funzione convessa $J_{k_{max}}(u)$ non ha una regione costante e presenta un solo punto di minimo che sarà indicato come u^* . In particolare, come mostrato in [47], u^* è tale per cui

$$u^* = \frac{\alpha + N - \beta + 1}{\sum_{i=1}^{\alpha} l_i + \sum_{i=\beta}^N k_{max} l_i} \quad (4.11)$$

dove $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ è il più grande indice per il quale $1/l_\alpha < u^*$ e $\beta \in \{1, \dots, N\}$ è il più piccolo indice per il quale $1/l_\beta > k_{max}u^*$.

Semplici procedure consentono di determinare u^* a partire dagli autovalori della matrice \mathbf{S} . In particolare, in [47] viene proposto un algoritmo che presenta una complessità dell'ordine di grandezza di $O(N)$.

Dalla soluzione u^* del problema (4.10) è possibile scrivere la soluzione del problema (4.2). Precisamente, la stima ML della matrice di covarianza del disturbo con vincolo sul numero di condizionamento è data da:

$$\hat{\Sigma}_{cond} = \mathbf{Q} \text{diag}(\hat{\lambda}_1^*, \dots, \hat{\lambda}_N^*) \mathbf{Q}^H,$$

dove:

$$\hat{\lambda}_i^* = \frac{1}{\mu_i^*} = \min \left\{ \frac{1}{u^*}, \max \left\{ \frac{1}{k_{max}u^*}, l_i \right\} \right\}$$

Lo stimatore così determinato rientra nella categoria degli *shrinkage estimators*⁴. Gli autovalori trasformati presentano la seguente forma:

$$\hat{\lambda}_i = \min(\max(\tau^*, l_i), k_{max}\tau^*) \quad (4.12)$$

dove:

$$\tau^* = \frac{1}{k_{max}u^*} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} l_i/k_{max} + \sum_{i=\beta}^N l_i}{\alpha + N - \beta + 1}.$$

L'espressione (4.12) ammette un'interpretazione matematica molto semplice: gli autovalori dello stimatore $\hat{\Sigma}_{cond}$ sono ottenuti troncando gli autovalori della matrice di covarianza campionaria, più grandi di $k_{max}\tau^*$ e più piccoli di τ^* ; questo consente di avere uno stimatore ben condizionato.

Come osservato più volte, il fatto che il problema della stima ML della matrice di covarianza del disturbo con vincolo sul numero di condizionamento possa essere ricondotto ad un problema di ottimizzazione convessa con una singola variabile è utile in presenza di problemi con un numero di variabili piuttosto significativo. Infatti, come accade in ambito radar, ciò consente di ottenere una drastica riduzione del tempo computazionale necessario per ottenere la stima di tale parametro. La complessità computazionale di tale approccio è essenzialmente quella della decomposizione spettrale della matrice di covarianza campionaria.

⁴Uno stimatore *shrinkage* della matrice di covarianza è una matrice che ha gli stessi autovettori della matrice campionaria \mathbf{S} , ma autovalori trasformati.

4.3.2 Utilizzo di conoscenze a priori

Spesso, in ambito radar, è possibile disporre di alcune informazioni a priori sull'ambiente operativo. Tali conoscenze possono contribuire a determinare un significativo miglioramento della stima ML della matrice di covarianza rendendola di fatto molto più affidabile. In particolare, nelle applicazioni radar, è utile osservare che tale matrice può essere scritta come somma di due contributi indipendenti:

$$\mathbf{Y} + \sigma^2 \mathbf{I}$$

Il primo addendo è una matrice hermitiana semidefinita positiva legata alle sorgenti di disturbo esterne al ricevitore radar (ad es. clutter e jamming); il secondo è una matrice scalare legata al rumore termico; infatti, con il termine σ^2 si è indicato il livello della densità spettrale di potenza (PSD) del rumore bianco. In molti casi il rumore termico può essere assunto noto, infatti, è possibile ottenere una misura della rumorosità intrinseca del ricevitore radar attraverso il funzionamento a circuito aperto del sistema.

Al fine di sfruttare le informazioni a priori disponibili sulla caratterizzazione del rumore termico, al problema (4.5) è possibile aggiungere un ulteriore vincolo. In tal modo, come mostrato in Appendice A, il problema della stima ML della matrice di covarianza del disturbo può essere equivalentemente riformulato come:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega} \mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & u \mathbf{I} \leq \mathbf{\Omega} \leq k_{max} u \mathbf{I} \\ & \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} - \mathbf{\Omega} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.13)$$

Le variabili di ottimizzazione del problema (4.13) sono la matrice $\mathbf{\Omega} \succ \mathbf{0}$ ed il numero non negativo u . In particolare, il problema (4.13) è un problema matriciale con vincoli di disuguaglianza matriciali lineari, che ricade nella classe dei problemi di ottimizzazione *MAXDET*. La sua soluzione non è al momento esprimibile in forma chiusa, ma, essendo un problema di programmazione convessa, esso può essere risolto numericamente utilizzando dei solver che implementano i più moderni metodi del *punto interiore*, o utilizzando solver dedicati alla risoluzione di problemi *MAXDET*.

Si noti che, detta $\mathbf{\Omega}^*$ la soluzione del problema (4.13), la stima ML sarà $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{\Omega}^*)^{-1}$. Inoltre, il problema (4.13) è equivalente ad un

problema di ottimizzazione con un numero di variabili minore. Precisamente, come mostrato in Appendice B è possibile ottenere il problema di ottimizzazione equivalente:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^N (l_i \mu_i - \log \mu_i) \\ \text{subject to} & u \leq \mu_i \leq k_{max} u \quad i = 1, \dots, N \\ & \mu_i \leq \frac{1}{\sigma^2} \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4.14)$$

Detto quindi $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_N^*, u^*$, il punto di ottimo del problema (4.14), la stima cercata è data da

$$\hat{\Sigma} = Q \hat{\Lambda}^{-1} Q^H,$$

dove si è indicata con Q la matrice unitaria di dimensione $N \times N$ mentre con $\hat{\Lambda}$ si è indicata la matrice diagonale che presenta sulla diagonale principale gli autovalori μ_1^*, \dots, μ_N^* .

Il principale vantaggio di questa formulazione è dato dalla diminuzione delle variabili da ottimizzare, infatti, il problema (4.14) presenta $N + 1$ variabili reali.

4.3.3 Criteri per la scelta della costante k_{max}

Un aspetto che è bene approfondire è quello della scelta della costante che limita superiormente il numero di condizionamento della matrice di covarianza da stimare. La selezione di tale parametro si rivela un aspetto cruciale in quanto, regola il range di troncamento $(\tau^*, k_{max} \tau^*)$ degli autovalori stimati. Idealmente bisognerebbe scegliere k_{max} pari al numero di condizionamento della matrice di covarianza vera. Tuttavia, non è possibile avere una conoscenza a priori del numero di condizionamento della matrice di covarianza del disturbo. Da qui nasce l'esigenza di proporre degli opportuni criteri per la scelta del parametro k_{max} . Di seguito vengono proposti tre approcci.

Come detto in precedenza, il numero di condizionamento della matrice Σ è definito come:

$$cond(\Sigma) = \frac{\lambda_{max}(\Sigma)}{\lambda_{min}(\Sigma)}.$$

Siccome $\lambda_{min}(\Sigma) \geq \sigma^2$,

$$\frac{\lambda_{max}(\Sigma)}{\lambda_{min}(\Sigma)} \leq \frac{\lambda_{max}(\Sigma)}{\sigma^2}, \quad (4.15)$$

da cui, una stima per eccesso del numero di condizionamento, può essere ottenuta a partire da una stima $\hat{\lambda}_{max}(\mathbf{\Sigma})$ per il massimo autovalore della matrice di covarianza $\mathbf{\Sigma}$.

Per poter determinare $\hat{\lambda}_{max}(\mathbf{\Sigma})$ è necessario utilizzare gli osservabili a disposizione. In particolare, è ragionevole ritenere che una buona stima per il massimo autovalore della matrice di covarianza del disturbo sia data da:

$$\hat{\lambda}_{max}(\mathbf{\Sigma}) = \lambda_{max}(\mathbf{S}). \quad (4.16)$$

Conseguentemente, una possibile scelta della costante k_{max} può essere

$$k_{max} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{S})}{\sigma^2} \quad (4.17)$$

Facendo leva sullo scenario radar in cui ci si trova ad operare, è possibile effettuare una stima diversa di $\lambda_{max}(\mathbf{\Sigma})$. Precisamente, sulla base degli osservabili a disposizione, è possibile stimare la direzione da cui proviene il disturbo avente massima potenza e la corrispondente potenza. Per poter ricercare tale direzione occorre massimizzare la seguente funzione:

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |\mathbf{Z}_i^T \mathbf{p}(\theta)|^2, \quad (4.18)$$

dove con

$$\mathbf{p}(\theta) = (1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(N-1)\theta})^T,$$

si è indicato il vettore di puntamento nella direzione θ . La (4.18) fornisce una buona stima per $\lambda_{max}(\mathbf{\Sigma})$. Pertanto, una scelta plausibile per la costante k_{max} è data da:

$$k_{max} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |\mathbf{Z}_i^T \mathbf{p}(\bar{\theta})|^2, \quad (4.19)$$

dove $\bar{\theta}$ rappresenta l'angolo per il quale la (4.18) è massima.

Tuttavia, la selezione del parametro k_{max} può essere dettata da considerazioni più prettamente matematiche. Infatti, come mostrato in Appendice C, è possibile dimostrare che per una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ non singolare ed hermitiana vale il seguente bound sul suo numero di condizionamento:

$$cond(\mathbf{A}) \leq \frac{2}{|\det(\mathbf{A})|} \left(\frac{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Pertanto, relativamente ad \mathbf{S} vale il bound:

$$\text{cond}(\mathbf{S}) \leq \frac{2}{|\det(\mathbf{S})|} \left(\frac{\sum_i \sum_j |s_{ij}|^2}{N} \right)^{\frac{N}{2}}. \quad (4.20)$$

sfruttando \mathbf{S} come stima di $\mathbf{\Sigma}$. Il secondo membro della (4.20) fornisce una ragionevole stima per la costante k_{max} , da cui

$$k_{max} = \frac{2}{|\det(\mathbf{S})|} \left(\frac{\sum_i \sum_j |s_{ij}|^2}{N} \right)^{\frac{N}{2}}. \quad (4.21)$$

Va notato che la scelta della costante k_{max} come in (4.21) può essere effettuata esclusivamente nel caso in cui \mathbf{S} è una matrice non singolare. Questo accade quando $K \geq N$. In caso contrario, è possibile sfruttare uno dei due criteri di selezione precedentemente proposti.

4.4 Tecniche alternative per la stima della Matrice di Covarianza

In questa sezione sono presentate alcune tecniche di stima per la matrice di covarianza che è possibile ritrovare in letteratura [43]. Tra le tante disponibili si è deciso di focalizzare l'attenzione sulle più note ed utilizzate cioè: LSMI, PSMI-SMI, ed FML.

E' doveroso effettuare questa breve dissertazione su questi ulteriori approcci al problema della stima della matrice di covarianza in quanto, nel paragrafo 4.5, le prestazioni del ricevitore adattivo ottenibili dall'utilizzo di tali tecniche saranno confrontate con quelle ottenibili dallo stimatore proposto.

4.4.1 LSMI

Una delle tecniche di stima più comunemente adottate per stimare la matrice di covarianza del disturbo è il metodo *LSMI* (*Loaded Sample Matrix Inversion*). L'idea che sta alla base di questa tecnica è quella di determinare una stima della matrice di covarianza esprimibile come:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}$$

dove α è un parametro noto come *fattore di caricamento*. E' chiaro che l'aggiunta del termine $\alpha \mathbf{I}$ alla matrice di covarianza campionaria ha lo scopo di caricare la diagonale principale della matrice \mathbf{S} del fattore α . In particolare, tale operazione di caricamento può essere interpretata come l'aggiunta di un rumore bianco artificiale.

Una proprietà estremamente importante dell'approccio LSMI è quella di garantire l'invertibilità della matrice di covarianza così stimata sebbene la matrice di covarianza campionaria possa essere o meno invertibile.

Un inconveniente del LSMI tradizionale è data dall'assenza di un metodo rigoroso per la scelta del fattore di caricamento α . In letteratura sono state proposte diverse opzioni per la selezione di tale parametro, una di queste suggerisce, ad esempio, di selezionare α sulla base della stima della potenza di rumore. Per ulteriori approfondimenti relativi alla scelta del fattore di caricamento è necessario riferirsi a [49].

4.4.2 PSMI-SMI

La tecnica *SMI* (*Sample Matrix Inversion*) prevede di adottare la matrice di covarianza campionaria come stima della matrice di covarianza del disturbo.

Si è già ampiamente accennato agli inconvenienti presentati da tale stima. In particolare, è necessario ricordare che la matrice di covarianza campionaria rappresenta una stima ML per la matrice $\mathbf{\Sigma}$ solo nel caso in cui $K \geq N$. In caso contrario, la matrice \mathbf{S} si presenta come singolare. Nel caso in cui $K < N$, un approccio alternativo all'utilizzo dell'inversa della matrice di covarianza stimata è quello di utilizzare la pseudo-inversa. Tale tecnica prende il nome di *PSMI* (*Pseudo Sample Matrix Inversion*).

L'obiettivo dell'utilizzo della pseudo-inversa è quello di ottenere una matrice che, per quanto possibile, si comporti come la matrice inversa. E' da notare che la pseudo inversa esiste per una qualunque matrice e qualora una matrice possa essere invertita, la sua pseudo-inversa e la sua inversa coincidono. Ciò vuol dire che, indicando con \mathbf{S}^* la pseudo inversa della matrice di covarianza campionaria, $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{-1}$ allor quando $K \geq N$.

In ogni caso, la tecnica PSMI-SMI non fornisce, in generale, una buona stima della matrice di covarianza del disturbo. Pertanto, in analogia con la matrice campionaria, ci si deve aspettare che tale tecnica

richieda un gran numero di campioni per riuscire a cancellare il disturbo presente nell'ambiente operativo di interesse. In particolare, è possibile dimostrare che il numero di campioni necessario per ottenere un buon grado di annullamento dell'interferenza è pari a $2N$, dove, in tal caso, N indica il numero di sensori presenti nello scenario di interferenza in cui si trova ad operare. E' immediato intuire che tale tecnica si presenta come estremamente svantaggiosa in presenza di array di sensori con un numero cospicuo di elementi.

4.4.3 FML

La tecnica *FML* (*Fast Maximum Likelihood*) prevede di determinare una stima ML della matrice di covarianza del disturbo assumendo che quest'ultima presenti una specifica struttura. In particolare, si richiede che la matrice di covarianza da stimare si presenti come somma di due contributi indipendenti:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (4.22)$$

dove \mathbf{R}_0 è una matrice Hermitiana semi-definita positiva con rango $M_0 \leq N$, e σ^2 è il livello di PSD del rumore termico. Fisicamente, \mathbf{R}_0 è un contributo legato al disturbo presente all'esterno del ricevitore radar mentre il secondo addendo è legato alla rumorosità intrinseca del ricevitore.

Poichè in molti scenari di interferenza è possibile assumere come nota la potenza di rumore termico, senza alcuna perdita di generalità è possibile porre $\sigma^2 = 1$ nella (4.22). Appare chiaro che l'unico termine non noto nella (4.22) è proprio la matrice \mathbf{R}_0 .

In [43] è dimostrato che la stima ML che tiene conto del vincolo (4.22) è

$$\mathbf{R}_{ML} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{Q}^H, \quad (4.23)$$

dove:

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \text{diag}(l_1, \dots, l_{\hat{M}}, 1, \dots, 1)$$

$l_1 \geq \dots \geq l_{\hat{M}} \geq \dots \geq l_N$ sono gli autovalori \mathbf{S} , \mathbf{Q} è la matrice unitaria della decomposizione spettrale corrispondente, mentre, \hat{M} è il numero di autovalori della matrice \mathbf{S} maggiori dell'unità.

E' evidente che la tecnica di stima FML richiede come unica conoscenza a priori il livello di potenza del rumore bianco. Tuttavia, vi sono dei casi in cui non è possibile conoscere esattamente la rumorosità intrinseca del ricevitore ma si conosce per essa un limite inferiore. In tal caso,

la matrice di covarianza del disturbo ha ancora la struttura indicata in (4.22) ma $\sigma \geq \sigma_0$ dove σ_0 è assunto essere noto. Lo stimatore ha ancora la struttura indicata in (4.23) ma questa volta:

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \text{diag}(l_1, \dots, l_{\hat{M}}, \sigma_0, \dots, \sigma_0).$$

In tal caso, \hat{M} è il numero degli autovalori della matrice di covarianza campionaria maggiori di σ_0 .

4.4.4 EPM

In un contesto relativo al solo processing radar adattivo, si potrebbe essere interessati a calcolare direttamente il vettore lineare di pesi necessario per l'annullamento dell'interferenza anzichè determinare una stima della matrice di covarianza del disturbo. La tecnica *EPM* (*Eigenvector Projection Method*), è utilizzata nel contesto dei ricevitori radar adattivi per il calcolo del vettore di peso.

L'idea che è alla base di tale tecnica è quella di utilizzare i primi J autovettori dominanti della matrice di covarianza campionaria per poter cancellare l'interferenza esterna al ricevitore radar ove J è il numero di *jammers* indipendenti ed a banda stretta presenti sulla scena.

In un contesto operativo, il vettore di peso adattivo è calcolato andando a determinare gli autovettori della matrice \mathbf{S} (si indichino tali autovettori con Φ_1, \dots, Φ_J) i cui autovalori superano una soglia pre-assegnata γ . La scelta di tale soglia è strettamente legata allo scenario di interferenza in cui opera il radar ed in particolare essa è funzione del numero di interferenti intenzionali presenti sulla scena.

Indicata con \mathbf{A} la matrice di dimensioni $N \times J$ contenente gli autovettori Φ_1, \dots, Φ_J , il vettore di peso adattivo può essere calcolato come:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I}_N - \mathbf{A}\mathbf{A}^H)\mathbf{s}^* \quad (4.24)$$

dove \mathbf{s}^* è il vettore di puntamento del segnale utile.

La qualità di tale tecnica è principalmente limitata dalla conoscenza a priori di J , a cui è strettamente legata la determinazione della soglia γ . Generalmente, il numero di interferenti intenzionali presenti sulla scena non è noto a priori, pertanto è necessario ricorrere a delle tecniche di stima semi-euristiche per poter determinare approssimativamente J .

4.5 Analisi delle prestazioni

Nel seguito, vengono riportate le prestazioni conseguibili con l'utilizzo dello stimatore proposto in questo Capitolo e con l'utilizzo delle altre tecniche proposte in letteratura per la stima della matrice di covarianza del disturbo.

In particolare saranno presentati diversi scenari di interferenza, e, per ciascuno di essi, saranno confrontate le prestazioni del ricevitore adattivo derivante dall'utilizzo dell'algoritmo di stima proposto (stima ML della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento) con le prestazioni ottenibili dalle altre tecniche di stima illustrate nel paragrafo 4.4.

Prima di presentare e discutere i risultati ottenuti, viene fornita una breve descrizione dello scenario in cui sono state condotte le analisi.

4.5.1 Descrizione del Contesto Operativo

Si assuma di avere a disposizione un array di antenne lineare ed uniforme composte da N elementi. Si supponga che in fase di trasmissione l'array sia stato puntato in boresight. Pertanto, il potenziale segnale utile ricevuto, è proporzionale al segnale:

$$\mathbf{s} = \mathbf{1}, \quad (4.25)$$

dove con la notazione $\mathbf{1}$ si è indicato un vettore di lunghezza N in cui tutti gli elementi sono uguali ad 1.

Per quanto concerne l'interferenza prodotta dai jammers, ciascun jammer presente nella scena è caratterizzato da un vettore di steering spaziale avente espressione

$$(1, \exp^{j\phi}, \exp^{j2\phi}, \dots, \exp^{j(N-1)\phi})^T$$

dove ϕ rappresenta la fase del jammer. Per la configurazione di antenna appena illustrata vale la relazione

$$\phi = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda_0},$$

in cui

- d è la distanza tra gli elementi dell'array;

- θ è l'angolo di *off-boresight*⁵ del jammer;
- λ_0 è la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza centrale di jamming f_0 .

Pertanto la matrice di covarianza del disturbo, che porta in conto la presenza di J jammers a banda larga ed incorrelati e del rumore termico del ricevitore, può essere descritta matematicamente come:

$$\Sigma_{nm} = \sum_{i=1}^J \alpha_i^2 \text{sinc}[0.5\beta(n-m)\phi_i] \exp[j(n-m)\phi_i] + \delta_{nm}, \quad (4.26)$$

dove, $n = 1, \dots, N$ ed $m = 1, \dots, N$. Nella (4.26) si è indicata con $\beta = B/f_0$ la *banda frazionale*, data dal rapporto tra la banda istantanea del segnale utile (assunta pari alla banda del jammer) e la frequenza centrale di jamming f_0 ; ϕ_i è l'angolo associato all' i -esimo jammer; α_i^2 è la potenza media dell' i -esimo jammer normalizzata alla potenza di rumore termico; $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ e δ_{nm} è la *delta di Kronecker*⁶. In particolare il contributo di δ_{nm} alla matrice di covarianza va a modellare il rumore termico.

Come modello di ricevitore, si è supposto di considerare un ricevitore lineare adattivo a ciclo aperto. Il funzionamento di tale tipologia di ricevitore è basato sul calcolo di un vettore lineare di pesi che massimizza il *rapporto segnale-rumore-interferenza* (sinteticamente indicato con *SINR*) all'uscita del ricevitore. Questo vettore di coefficienti può essere calcolato moltiplicando l'inversa della matrice di covarianza del disturbo stimata per il vettore di steering del segnale utile. Pertanto, per ciascuna delle tecniche di stima proposte in questo Capitolo, il vettore dei pesi può essere calcolato come:

$$\mathbf{w} = \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{s} \quad (4.27)$$

dove con $\hat{\Sigma}$ si è indicata (e sarà di seguito indicata) la matrice di covarianza del disturbo stimata, mentre \mathbf{s} rappresenta il segnale utile ricevuto.

⁵Per angolo di *off-boresight* si intende, l'angolo che si forma tra l'asse dell'antenna e la direzione in cui si trova la sorgente.

⁶Per *delta di Kronecker* si intende una funzione così definita:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il calcolo del vettore di peso per la tecnica EPM anzichè utilizzare la (4.27) è necessario adoperare la (4.24).

Ovviamente come parametro di valutazione delle prestazioni si è scelto di considerare il $SINR$ medio normalizzato al $SINR$ ottimo. Precisamente

$$\rho_{ave} = \frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} \frac{|\mathbf{w}_i^T \mathbf{s}|^2}{(\mathbf{w}_i^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}_i) SINR_{opt}},$$

dove:

- $SINR_{opt} = \mathbf{s}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{s}$ è il $SINR$ che si otterrebbe, in un determinato scenario di interferenza, se si utilizzasse il vettore di pesi ottimo;
- \mathbf{w} è il vettore di pesi calcolato utilizzando una particolare realizzazione dello stimatore della matrice di covarianza;
- MC è il numero di medie Monte Carlo per stimare il emphSINR medio normalizzato.

In ipotesi ideali ovvero, quando si ha perfetta conoscenza della matrice di covarianza del disturbo, è possibile ottenere la massima cancellazione dell'interferenza. In tal caso, infatti, sarebbe possibile calcolare il vettore di pesi ottimo e quindi attingere alle prestazioni del ricevitore adattivo ideale. Tuttavia, non è possibile avere a disposizione una conoscenza a priori della matrice di covarianza, ma, come detto, deve essere stimato sulla base degli osservabili a disposizione.

Teoricamente, per potersi avvicinare alle prestazioni di un ricevitore adattivo ideale c'è bisogno di un numero di osservabili infinito, oppure, realisticamente molto elevato. In tal caso, infatti, è possibile avere una stima quasi perfetta della matrice di covarianza del disturbo.

Tuttavia, come già ampiamente detto, in scenari radar reali si è in grado di prelevare un numero esiguo di campioni ed è quindi evidente che negli scenari di interferenza reali è di fatto impossibile raggiungere le prestazioni di un ricevitore ideale. Per poter garantire una buona reiezione delle componenti di disturbo si accetta di tollerare una perdita sul $SINR$ medio che si aggiri intorno ai 3 dB. In tal caso, le prestazioni di un ricevitore radar adattivo reale si mantengono prossime a quelle di un ricevitore ideale ed è possibile garantire delle buone proprietà in termini di cancellazione dell'interferenza.

Pertanto, per ciascuna tecnica di stima proposta è interessante determinare quale sia il più piccolo numero di osservabili necessario per

ottenere tale perdita. In particolare, il numero di campioni statisticamente indipendenti richiesto per ciascun sensore e necessario per ottenere un livello prestazionale del ricevitore adattivo prossimo (nominalmente di 3dB) a quella ottimo è chiamato *MOE* (Measure Of Effectiveness) del ricevitore. Tale parametro, sarà indicato sinteticamente con K_{3dB} e sarà assunto come principale parametro di qualità per una determinata tecnica di stima.

4.5.2 Analisi prestazionale

L'analisi prestazionale degli algoritmi descritti in precedenza è stata condotta analizzando diversi scenari di interferenza. Per ciascuno scenario, ed algoritmo, viene mostrato l'andamento del *SINR* medio in funzione del numero di campioni indipendenti K prelevati da ciascun sensore. Per i casi analizzati si è supposto che il numero di sensori presenti sulla scena sia $N = 20$, il livello di potenza di ciascun jammer sia di 30dB⁷ ed $MC = 1000$.

Per la tecnica *LSMI* è stato selezionato un fattore di caricamento α pari ad 1, mentre per la tecnica *EPM* è stata selezionata un soglia γ pari a 2, in quanto, è possibile dimostrare che con queste scelte si ottengono delle prestazioni eccellenti nei vari scenari di interferenza proposti [43].

Con le notazioni *COND1*, *COND2*, *COND3* sono state indicate le stime ML della matrice di covarianza con il vincolo sul numero di condizionamento e con diversi valori di k_{max} . In particolare:

- per *COND1* il k_{max} è stato selezionato come indicato in (4.17);
- per *COND3* il k_{max} è stato selezionato come indicato in (4.19);
- per *COND2* il k_{max} è stato selezionato come:

$$k_{max} = \begin{cases} \frac{\lambda_{max}(\mathbf{S})}{\sigma^2} & \text{se } N < K \\ \frac{2}{|\det(\mathbf{S})|} \left(\frac{\sum_i \sum_j |s_{ij}|^2}{N} \right)^{\frac{N}{2}} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.28)$$

dove con s_{ij} si è indicato il generico elemento della matrice di covarianza campionaria.

⁷Si è supposto che per ciascun jammer la potenza considerata sia normalizzata al livello di potenza del rumore termico.

Scenario di interferenza con $J = 1$

In questa sezione viene considerato uno scenario di interferenza in cui è presente un singolo jammer a banda stretta (ovvero $\beta = 0$) con fase $\phi = 60^\circ$. In Figura 4.1 è mostrato l'andamento del $SINR$ medio normalizzato per i diversi algoritmi considerati. Seppur con una diversa velocità di

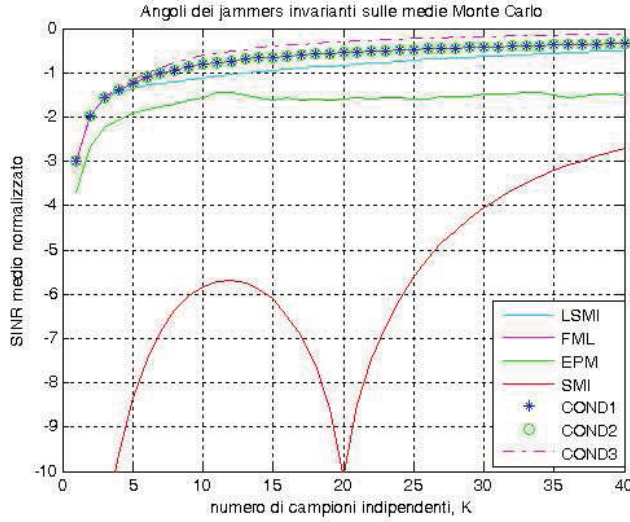


Figura 4.1: Andamento del $SINR$ medio in funzione del numero di campioni indipendenti K , in presenza di un singolo interferente a banda stretta con $\phi = 60^\circ$.

convergenza, ciascuna delle tecniche raggiunge asintoticamente un $SINR$ medio pari a 0dB per $K \rightarrow +\infty$.

E' possibile osservare che la tecnica SMI presenta le prestazioni peggiori. In particolare essa raggiunge i $-3dB$ in presenza di un numero di campioni all'incirca pari a 36, cioè $K_{3dB_{SMI}} \approx 36$. Le prestazioni scadenti di tale tecnica sono dovute essenzialmente all'impiego della matrice di covarianza campionaria come stima della matrice di covarianza del disturbo. Anche negli scenari di interferenza successivi sarà possibile notare che la tecnica SMI presenterà sempre delle prestazioni peggiori rispetto alle altre tecniche di stima considerate.

Per tutte le altre tecniche è semplice osservare che $K_{3dB} \approx 2$. In particolare si osservi che la tecnica FML presenta un miglioramento sul $SINR$ medio rispetto alla $LSMI$ di circa 0,25dB. Tale vantaggio sarà mantenuto anche negli scenari di interferenza analizzati successivamente. Per lo

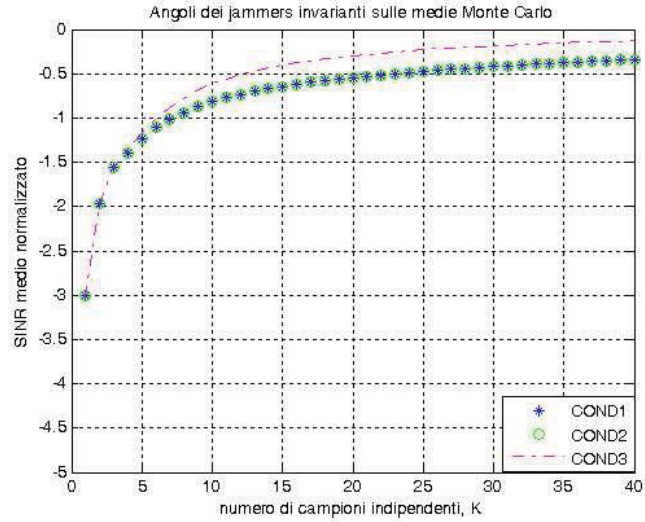


Figura 4.2: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede la presenza di un singolo jammer a banda stretta con $\phi = 60^\circ$.

stimatore con vincolo sul numero di condizionamento, si nota che presenta un andamento molto simile alle prestazioni della tecnica *FML*. Da notare che le prestazioni del *SINR* medio per quanto riguarda la scelta di k_{max} secondo la (4.17) e la (4.28) risultano essere praticamente identiche, e questo comportamento sarà mantenuto in tutte le analisi effettuate. Comunque, le prestazioni migliori si ottengono in presenza di una scelta della k_{max} come indicato in (4.19); infatti, osservando attentamente la Figura 4.2 è possibile notare che, in tal caso, la velocità di convergenza del *SINR* medio è più alta rispetto a quella ottenibile per scelte differenti di tale parametro. Tale miglioramento delle prestazioni, in termini di *SINR* medio, non sarà riscontrabile negli scenari di interferenza successivamente analizzati, dove le prestazioni delle curve *COND1*, *COND2* e *COND3* risulteranno essere essenzialmente le medesime.

Scenario di interferenza con $J = 5$

In Figura 4.3 è mostrato uno scenario di interferenza in cui sono presenti 5 jammers a banda stretta con angoli di fase descritti dal vettore

$\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$. Osservando attentamente la Figura 4.3 è

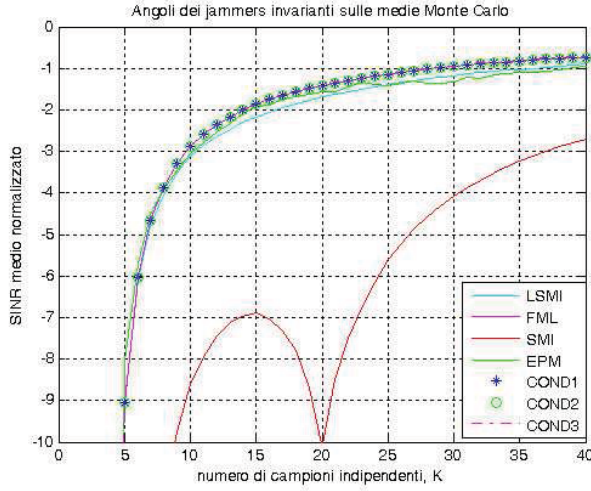


Figura 4.3: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K , in presenza di 5 jammers a banda stretta con angoli di fase $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$.

possibile notare che per tutte e tre le scelte proposte per la costante k_{max} , l'algoritmo di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento si comporta allo stesso modo della tecnica *FML*. Infatti, richiedono un numero minimo di campioni necessario per raggiungere i $-3dB$ pari a $K_{3dB} \approx 9$, cioè all'incirca pari al doppio del numero di jammers presenti sulla scena. Va notato che le tecniche *LSMI* e *EPM* presentano delle prestazioni in termini di *MOE* simili alla tecnica *FML* in quanto richiedono $K_{3dB} \approx 2J$ ma una velocità di convergenza di ρ_{ave} leggermente più bassa rispetto a quella presentata dalla *FML* e dallo stimatore con il solo *CN*. La tecnica *SMI* si rivela essere ancora la tecnica con le prestazioni peggiori, infatti raggiunge i $-3dB$ in presenza un numero di campioni all'incirca pari a 37, cioè $K_{3dB_{SMI}} \approx 37$. Dalla Figura 4.4 è possibile notare che le tre curve riferite alle differenti scelte del k_{max} presentano le medesime prestazioni in termini di *SINR* medio. In Figura 4.5 è mostrato cosa succede se gli interferenti intenzionali considerati nel precedente scenario di interferenza presentano una banda frazionale non più nulla ma pari a $\beta = 0.03$. Sostanzialmente è possibile evidenziare che non vi sono significativi cambiamenti rispetto al caso di jammers a

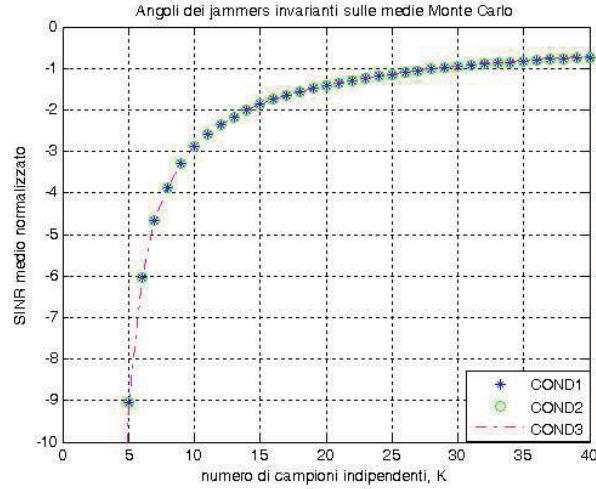


Figura 4.4: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede presenti 5 jammers a banda stretta con angoli di fase $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$.

banda stretta. Pertanto tutte le considerazioni effettuate in termini di velocità di convergenza del $SINR$ medio ed in termini di numero minimo di campioni necessario per poter raggiungere un $SINR$ medio pari a $-3dB$ possono essere estese anche a questo scenario di interferenza. In Figura 4.6 si è supposto di cambiare radicalmente lo scenario di interferenza in cui ci si trova ad operare. In tal caso si è assunto che sulla scena siano ancora presenti cinque interferenti a banda larga con una banda frazionale $\beta = 0.03$ ma con angoli di fase descritti dal vettore $\phi = (41^\circ, 182^\circ, 273^\circ, 281^\circ, 299^\circ)$. Rispetto agli scenari precedentemente analizzati, nella scena proposta, è possibile evidenziare che per tutte le tecniche di stima, il numero di campioni richiesto per raggiungere un $SINR$ medio di $-3dB$ cresce in modo significativo. Ciò è dovuto al fatto che in questo scenario di interferenza, rispetto ai precedenti, il numero di autovalori significativi (cioè diversi da zero) della matrice di covarianza dell'interferenza cresce in modo rilevante e pertanto è necessario avere a disposizione più osservabili per poter effettuare una stima corretta.

Tuttavia, è possibile osservare che anche in questo scenario lo stimatore con vincolo sul numero di condizionamento presenta le medesime

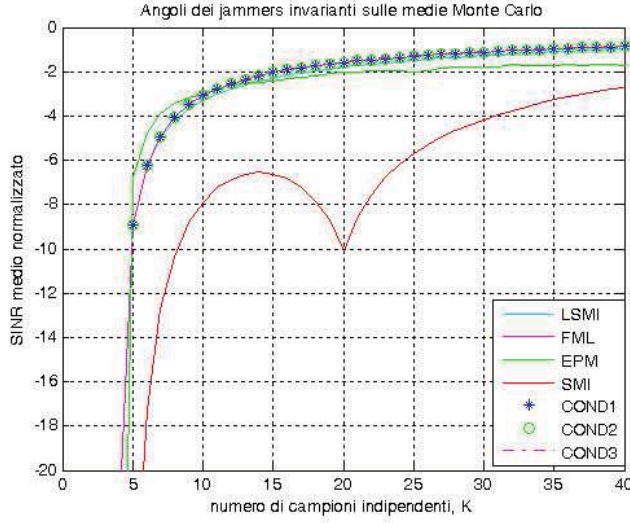


Figura 4.5: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K , in presenza di 5 jammers a banda larga con $\beta = 0.03$ con angoli di fase $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$.

prestazioni della tecnica *FML*, e permette di ottenere un valore del *MOE* buono; infatti, l'algoritmo di stima proposto per la stima della matrice di covarianza del disturbo richiede un $K_{3dB} \approx 20$ campioni, mentre per gli algoritmi di stima *LSMI* e *EPM* $k_{3dB} \approx 21 - 22$, eccetto che per la tecnica *SMI* la quale, anche in questo caso, presenta le prestazioni peggiori, difatti per essa $K_{3dB} \approx 37$.

Osservando la Figura 4.7 è possibile osservare che anche in questo scenario di interferenza, l'algoritmo di stima proposto presenta le medesime prestazioni in riferimento alla scelta di differenti k_{max} .

Scenario di interferenza con $J=10$

Nella Figura 4.8 viene analizzato uno scenario di interferenza che vede presenti sulla scena dieci jammers a banda stretta con fasi che vanno da 20° a 65° equispaziati di 5° . E' possibile notare che per la tecnica di stima *LSMI*, il *MOE* è pari quasi al doppio del numero di interferenti presenti sulla scena, cioè $K_{3dB} \approx 17$ campioni. L'algoritmo di stima proposto risulta avere le medesime prestazioni della tecnica *FML* e consente di raggiungere un *SINR* medio di $-3dB$ in presenza di un

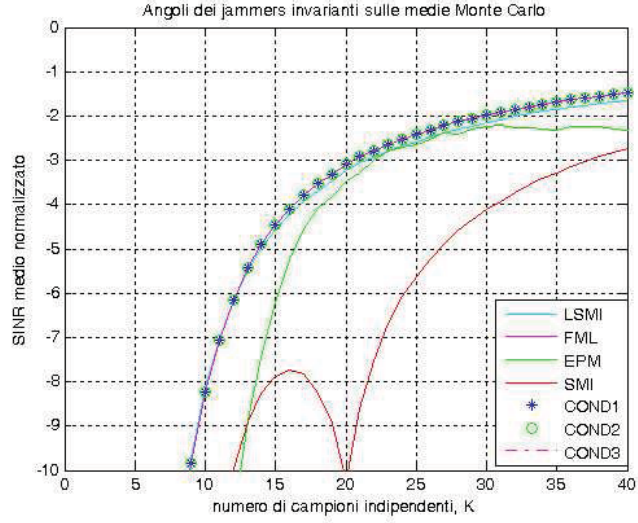


Figura 4.6: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K , in presenza di 5 jammers a banda larga con $\beta = 0.03$ con angoli di fase $\phi = (41^\circ, 182^\circ, 273^\circ, 281^\circ, 299^\circ)$.

numero di campioni ridotto e pari a $K_{3dB} \approx 13 - 14$ campioni. In questo scenario la tecniche *EPM* e *SMI* risultano essere le meno performanti avendo necessità rispettivamente di 17-18 campioni e 35 campioni per raggiungere i $-3dB$. Come mostrato in Figura 4.9, anche in questo scenario i tre stimatori con il vincolo sul numero di condizionamento, ma con scelte differenti sul k_{max} , presentano le medesime prestazioni in termini di *SINR* medio.

Riduzione della costante k_{max}

Un aspetto che è necessario approfondire è capire come variano le prestazioni dello stimatore proposto in funzione di una riduzione del parametro k_{max} . In Figura 4.5.2 viene analizzato uno scenario di interferenza che vede presenti sulla scena cinque jammers a banda stretta con fasi $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$. Viene considerato lo stimatore con vincolo sul numero di condizionamento e scelte di k_{max} tali che

$$k_{max1} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{\sigma^2}, \quad k_{max2} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{2\sigma^2}, \quad k_{max5} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{5\sigma^2},$$

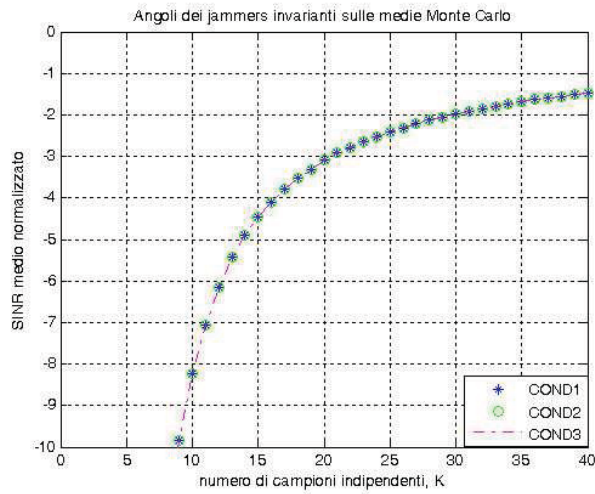


Figura 4.7: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede presenti 5 jammers a banda larga con $\beta = 0.03$ con angoli di fase $\phi = (41^\circ, 182^\circ, 273^\circ, 281^\circ, 299^\circ)$.

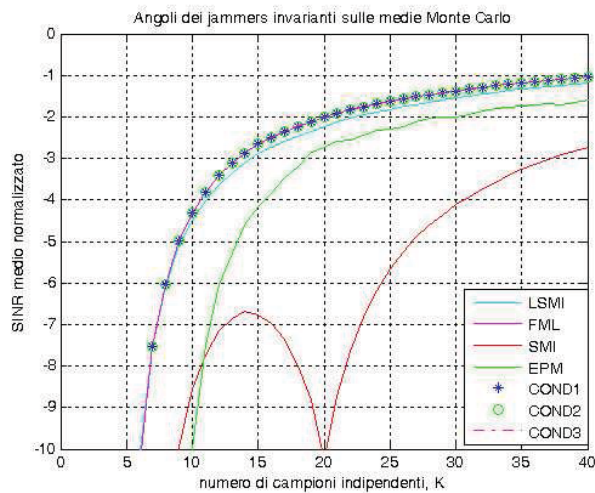


Figura 4.8: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K , in presenza di 10 jammers a banda stretta con angoli di fase da 20° a 65° equispaziate di 5° .

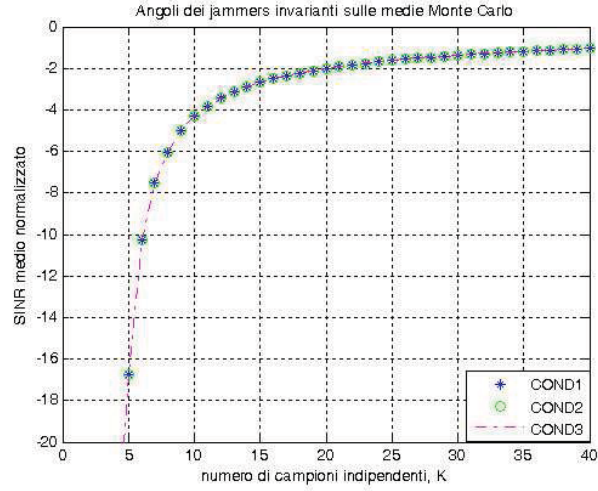


Figura 4.9: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede presenti 10 jammers a banda stretta con angoli di fase da 20° a 65° equispaziate di 5° .

Dalla Figura 4.5.2 è possibile notare che le tre curve presentano il medesimo comportamento in termini di MOE che si attesta all'incirca sui 9 campioni.

Effettuando, però, una scelta più drastica in termini di riduzione della costante k_{max} ,

$$k_{max1} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{\sigma^2}, \quad k_{max50} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{50\sigma^2}, \quad k_{max100} = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{s})}{100\sigma^2},$$

dalla Figura 4.5.2 si può notare un aumento del MOE che passa dai 9 campioni per una selezione di $k_{max} = k_{max1}$, ai 12 campioni per $k_{max} = k_{max50}$, sino ai 19 campioni per una scelta di $k_{max} = k_{max100}$.

In questo caso il degradamento delle prestazioni in termini di MOE è imputabile ad un restringimento del dominio di ottimizzazione del problema che si è chiamati a risolvere; infatti, ad esempio, si considerino i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & \mathbf{u}\mathbf{I} \leq \mathbf{\Omega} \leq k_{max1}\mathbf{u}\mathbf{I} \\ & \frac{1}{\sigma^2} - \mathbf{\Omega} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.29)$$

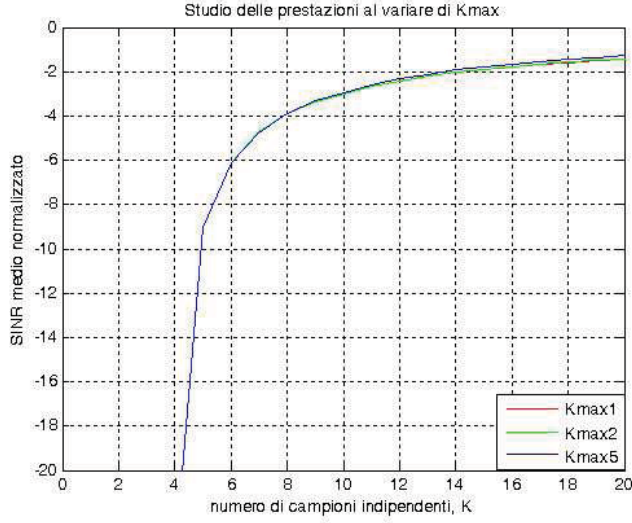


Figura 4.10: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede presenti 5 jammers a banda stretta con angoli di fase $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & u\mathbf{I} \leq \mathbf{\Omega} \leq k_{max50}u\mathbf{I} \\ & \frac{1}{\sigma^2} - \mathbf{\Omega} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.30)$$

E' possibile notare che, poichè $k_{max50} \leq k_{max1}$ il dominio del problema di ottimizzazione (4.30) è un sottoinsieme del dominio del problema di ottimizzazione (4.29) pertanto, dovendo ricercare il punto di ottimo in un insieme più piccolo di quello del problema (4.29), in termini verosimiglianza il valore ottimo sarà sicuramente più piccolo rispetto a quello che si ottiene nel caso del problema (4.29) e ragionevolmente questo si ripercuote sul *SINR* che si riesce a raggiungere.

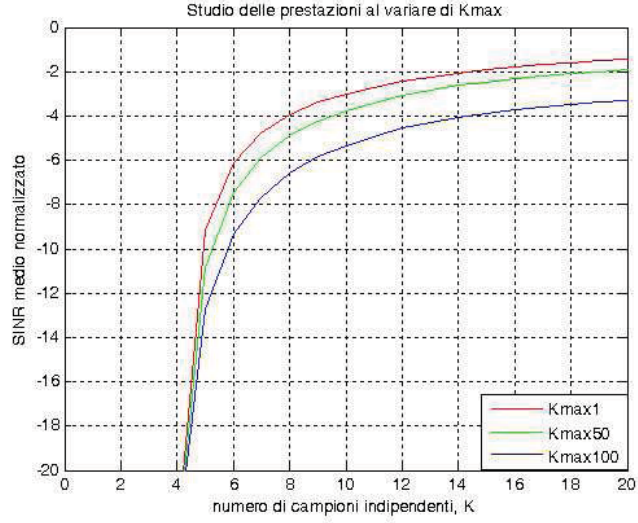


Figura 4.11: Andamento del SINR medio in funzione del numero di campioni indipendenti K ottenuto utilizzando la tecnica di stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento. Lo scenario di interferenza vede presenti 5 jammers a banda stretta con angoli di fase $\phi = (20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$.

4.6 Conclusioni e Sviluppi Futuri

In questo Capitolo, è stato considerato il problema della stima della matrice di covarianza della componente di disturbo presente nel segnale ricevuto in un sistema radar. Tale componente di disturbo modella diversi contributi di degradazione del segnale utile, quali: clutter, rumore termico e interferenze intenzionali dovute alla presenza di jammers.

Siccome le tecniche convenzionalmente utilizzate per la stima della matrice di covarianza non consentono di contrastare in modo efficace l'interferenza presente in scenari radar caratterizzati da un disturbo non omogeneo, in questo Capitolo è stato proposto un nuovo stimatore della matrice di covarianza da utilizzare in ambito radar. In particolare, per determinare la stima della matrice di covarianza del disturbo è stato utilizzato un approccio a massima verosimiglianza ed è stato portato in conto un vincolo sul numero di condizionamento della matrice di covarianza stimata.

Si è mostrato che il problema di ottimizzazione da risolvere per determinare la stima cercata è equivalente ad un problema *MAXDET*. In-

oltre, attraverso una catena di problemi di ottimizzazione equivalenti, si è anche mostrato che si può ricondurre il problema in esame ad un problema di ottimizzazione convessa con un'unica variabile da ottimizzare. Quest'ultima formulazione equivalente del problema della stima ML della matrice di covarianza del disturbo con vincolo sul numero di condizionamento consente di ridurre drasticamente i tempi computazionali necessari per ottenere la stima cercata e rendere effettiva tale tecnica per applicazioni radar.

L'analisi delle prestazioni ha evidenziato come lo stimatore così ottenuto consenta di ottenere delle buone prestazioni, in termini di cancellazione dell'interferenza, anche in presenza di un numero esiguo di campioni prelevati. Infatti, le sue prestazioni sono migliori, o confrontabili, con quelle delle principali tecniche presenti in letteratura.

Infine, nell'ipotesi in cui si abbiano a disposizione delle informazioni a priori sulla rumorosità intrinseca del ricevitore, al problema della stima ML della matrice di covarianza del disturbo con vincolo sul numero di condizionamento è stato aggiunto un ulteriore vincolo per portare in conto, in modo specifico, di questa informazione a disposizione. Si è mostrato che il problema di ottimizzazione da risolvere per ottenere lo stimatore cercato è equivalente ad un problema *MAXDET*, risolvibile quindi con complessità polinomiale.

Come possibili sviluppi futuri è possibile considerare la ricerca di un algoritmo efficiente per la risoluzione in forma chiusa del problema della stima della matrice di covarianza con vincolo sul numero di condizionamento e conoscenza sulla rumorosità del ricevitore, così come le sue analisi prestazionali.

Appendice

Appendice A

Si consideri il problema di ottimizzazione

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Sigma}^{-1}) \\ \text{subject to} & \text{cond}(\mathbf{\Sigma}) \leq k_{max} \\ & \mathbf{\Sigma} \succeq a^2\mathbf{I} \end{cases} . \quad (4.31)$$

Effettuando il cambiamento di variabile $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & \text{cond}(\mathbf{\Omega}) \leq k_{max} \\ & \mathbf{\Omega} \preceq a^2\mathbf{I} \end{cases} .$$

Siccome da [34], $\text{cond}(\mathbf{S}) \leq k_{max}$ è equivalente a

$$u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Omega} \preceq k_{max}u\mathbf{I},$$

dove $u > 0$, il problema (4.31) è equivalente al problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Omega} \preceq k_{max}u\mathbf{I} \\ & \mathbf{\Omega} \preceq a^2\mathbf{I} \end{cases} , \quad (4.32)$$

che è un problema di ottimizzazione di tipo *MAXDET*.

Appendice B

Usando [50, Teorema 7.4.10, p. 433] la soluzione ottima del problema

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{Tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}) - \log \det(\mathbf{\Omega}) \\ \text{subject to} & u\mathbf{I} \preceq \mathbf{\Omega} \preceq k_{\max}u\mathbf{I} \\ & \mathbf{\Omega} \preceq a^2\mathbf{I} \end{cases}, \quad (4.33)$$

ha la forma

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H, \quad (4.34)$$

cioè gli autovettori ottimi coincidono con gli autovettori di \mathbf{S} . Sostituendo la (4.34) in (4.33) gli autovalori della stima ML dell'inversa della matrice di covarianza sono la soluzione del problema

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^N (l_i \mu_i - \log \mu_i) \\ \text{subject to} & u \leq \mu_i \leq k_{\max} u \quad i = 1, \dots, N \\ & \mu_i \leq a^2 \quad i = 1, \dots, N \end{cases}. \quad (4.35)$$

Appendice C

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice non singolare ed hermitiana e siano

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

i suoi valori singolari, cioè σ_i^2 , $i = 1, \dots, n$, sono gli autovalori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

La media geometrica degli n numeri $\sigma_1^2/2, \sigma_1^2/2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{n-1}^2$ è data da:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} \sigma_1^4 \sigma_2^2 \dots \sigma_{n-1}^2 \right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{1}{4} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2} \dots \sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2 \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \text{cond}(\mathbf{A}) |\det(\mathbf{A})| \right)^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Considerando, invece, la loro media aritmetica

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{n-1}^2) &\leq \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{n-1}^2 + \sigma_n^2) = \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2. \end{aligned}$$

Poichè la media geometrica è limitata inferiormente dalla media aritmetica, segue che:

$$\left(\frac{1}{2} \text{cond}(\mathbf{A}) |\det(\mathbf{A})|\right)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}{n}$$

da cui segue:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \leq \frac{2}{|\det(\mathbf{A})|} \left(\frac{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Bibliografia

- [1] S. Boyd e L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- [3] A. d’Aspremont e S. Boyd, “Relaxations and randomized methods for nonconvex QCQPs”, EE392o Class Notes, Stanford University, Autumn 2003.
- [4] L. Vandenberghe, S. Boyd, S. P. Wu *Determinant Maximization with Linear Matrix Inequality Constraints*, April 8, 1996.
- [5] P. M. Grant, J. H. Collins, “Introduction to electronic warfare”, *IEEE Proceedings Part. F, Communications, Radar and Signal Processing*, Vol. 129, Issue 3, pp. 113 - 132, June 1982.
- [6] D. C. Schleher, “Introduction to Electronic Warfare”, Norwood, MA: Artech House , 1986.
- [7] S. D. Berger, “Digital radio frequency memory linear range gate stealer spectrum”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 2, pp. 725-735, Apr. 2003.
- [8] M. F. Radford, “Radar ECCM: A European approach”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-14, Issue 1, pp. 194 - 198, January 1978.
- [9] M. Greco, F. Gini, A. Farina “Radar detection and classification of jamming signals belonging to a cone class”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, No. 5, May 2008.

- [10] M. Greco, F. Gini, A. Farina, "Combined effect of phase and RGPO delay quantization on jamming signal spectrum", *IEEE International Radar Conference*, Arlington, VA, May 2005.
- [11] O. Besson, "Adaptive detection of a signal whose signature belongs to a cone", *Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing*, Waltham, MA, pp. 409 - 413, 12-14 July 2006.
- [12] Y. Huang, A. De Maio, S. Zhang, *Convex Optimization in Signal Processing and Communications*, Cambridge University Press, 2009.
- [13] J. Lofeberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", *IEEE International Symposium on Computer Aided Constrol Systems Design*, Taipei, September 2004.
- [14] Jos. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over simmetric cones", *Optimization Methods and Software*, Vol. 11-12, pp. 625 - 653, August 1999.
- [15] N. Levanon and E. Mozeson, "Radar Principles", Wiley-Interscience, January 1988.
- [16] M.N. Cohen, M.R. Fox, e J.M. Baden, "Minimum Peak Sidelobe Pulse Compression Codes", *IEEE International Radar Conference*, pp. 633 - 638, 1990.
- [17] Y.I. Abramovich and M.B. Sverdlik, "Synthesis of a filter which maximizes the signal-to-noise radio under additional quadratic constraints", *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 15, pp. 1977-1984, Nov. 1970.
- [18] V.T. Dolgochub and M.B. Sverdlik, "Generalized V-filters", *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 15, pp. 147-150, Jan. 1970.
- [19] S.D. Blunt and K. Gerlach, "Adaptive pulse compression via MMSE estimation", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, pp. 572-584, Apr. 2006.
- [20] A. De Maio, M. Piezzo, S. Iommelli , and A. Farina, "Design of Pareto-Optimal Radar Receive Filters, *5th Signal Processing Symposium SPS-2011*, Jachranka (Warsaw), Poland, June 2011.

- [21] P. Stoica, J. Li, and M. Xue, "Transmit codes and receive filters for radar", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 25, No. 6, pp. 94 - 109, November 2008.
- [22] J. Jedwab, "A survey of the merit factor problem for binary sequences", in *Sequences and Their Applications SETA 2004 (Lecture Notes in Computer Science)*, vol. 3486.
- [23] T. Helleseth, D. Sarwate, H.Y. Song, and K. Yang, Eds. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2005, pp. 30-55.
- [24] T. Holdt, "The merit factor problem for binary sequences", in *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes (Lecture Notes in Computer Science)*, vol. 3857.
- [25] C.A. Stutt and L.J. Spafford, "A 'best' mismatched filter response for radar clutter discrimination", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 14, pp. 280-287, Mar. 1968.
- [26] Y.I. Abramovich and M.B. Sverdlik, "Synthesis of filters maximizing the signal-to-noise ratio in the case of a minimax constraint on the sidelobes of the crossambiguity function", *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 16, pp. 253-258, Feb. 1971.
- [27] Y.I. Abramovich, "Estimation of accuracy of a method for synthesis of filters which optimize the cross-ambiguity function in accordance with the minimax criterion", *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 18, pp. 785-787, May 1973.
- [28] K. R. Griep, J. A. Ritcey, e J. J. Burlingame, "Poly-phase Codes and Optimal Filters for Multiple User Ranging", *IEEE Transactions On Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 31, pp. 752 - 767, Aprile 1995.
- [29] S. Zoraster, "Minimum peak range sidelobe filters for binary phase-coded waveforms", *IEEE Transactions On Aerospace and Electronic Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 112 - 115, Jan. 1980.
- [30] V.M. Koshevoy and M.B. Sverdlik, "Effect of memory and pass band of a generalized filter on efficiency of noise suppression", *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 18, pp. 1181-1188, Aug. 1973.

- [31] W.D. Rummmler, "A technique for improving the clutter performance of coherent pulse train signals", *IEEE Transactions On Aerospace and Electronic Systems*, vol. 3, pp. 898-906, Nov. 1967.
- [32] D.F. DeLong and E.M. Hofstetter, "On the design of optimum radar waveforms for clutter rejection", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 13, pp. 454-463, July 1967.
- [33] L.J. Spafford, "Optimum radar signal processing in clutter", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 14, pp. 734-743, Sept. 1968.
- [34] J. Li, P. Stoica, and Z. Wang, "Doubly constrained robust Capon beamformer", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 52, pp. 2407-2423, Sept. 2004.
- [35] K. Deb, "Multi-objective optimization using evolutionary algorithms", *John Wiley Sons, 1st ed.*, June 2001.
- [36] N. Levanon and E. Mozeson, "Radar Signals", John Wiley & Sons, 2004.
- [37] M. A. Richards, J. A. Scheer, and W. A. Holm, "Principles of Modern Radar: Basic Principles", *SciTech Publishing*, 2010.
- [38] E. J. Kelly, "An Adaptive Detection Algorithm", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 22, No. 1, pp. 115-127, March 1986.
- [39] C. D. Richmond, "Performance of a Class of Adaptive Detection Algorithms in Nonhomogeneous Environments", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 48, No. 5, pp. 1248-1262, May 2000.
- [40] F. Gini, M. Rangaswamy, "Knowledge Based Radar Detection, Tracking and Classification", *John Wiley*, 2008.
- [41] B. Himed and W. L. Melvin, "Analyzing Space-Time Adaptive Processors Using Measured Data", *Proceedings of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, Pacific Grove (CA), USA*, pp. 930-935, November 1997.

- [42] R. Nitzberg, "Application of Maximum Likelihood Estimation of Persymmetric Covariance Matrices to Adaptive Processing", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 124-127, January 1980.
- [43] M. Steiner and K. Gerlach, "Fast Converging Adaptive Processors or a Structured Covariance Matrix", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 36, No. 4, pp. 1115-1126, October 2000.
- [44] P. Wang, H. Li, and B. Himed, "A Simplified Parametric GLRT for STAP Detection", *IEEE Radar Conference*, pp. 1-5, 2009.
- [45] E. Conte, M. Lops, and G. Ricci, "Adaptive Detection Schemes in Compound-Gaussian Clutter", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, No. 4, pp. 1058-1069, October 1998.
- [46] A. De Maio, Y. Huang, D. P. Palomar, S. Zhang, and A. Farina, "Fractional QCQP With Applications in ML Steering Direction Estimation for Radar Detection", *IEEE Transaction on Signal Processing*, Vol. 59, No. 1, pp. 172-185, January 2011.
- [47] J. H. Won, J. Lim, S. J. Kim, B. Rajaratnam "Maximum Likelihood Covariance Estimation with a Condition Number Constraint", Stanford University.
- [48] K. C. Toh, R. H. Tutuncu, M. J. Todd *On the implementation and usage of SDPT3 a MATLAB software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 4.0* Draft July 2006.
- [49] X. Mestre, M. A. Laguna "Finite sample size effect on minimum variance beamformers: optimum diagonal loading factor for large array" *IEEE Transaction on Signal Processing*, Vol.54 NO.1, January 2006.
- [50] R.A. Horn and C.R. Johnson, "Matrix Analysis", *Cambridge University Press*, 1985.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Professore Antonio De Maio ed il Professore Ernesto Conte per la grande disponibilità e l'enorme sostegno offertomi nel corso di questi tre anni. Non posso dimenticare di salutare i miei amici colleghi Augusto, Marco e Vincenzo che hanno vissuto con me questo indimenticabile percorso.

Vorrei inoltre dare un abbraccio speciale a mia moglie Luisa e a mio figlio Riccardo per la grande pazienza avuta.

Infine un saluto speciale è per mio padre Alfonso, scomparso recentemente, fulcro della mia vita, che mi ha sempre sostenuto sia nella vita professionale che privata.

